

В. А. Плюйко*, О. М. Горбаченко, Н. О. Романовський

*Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна**Відповідальний автор: plujko@gmail.com**СИСТЕМАТИКА ВНЕСКУ ПІГМІ-ДИПОЛЬНИХ РЕЗОНАНСІВ
В ЕНЕРГЕТИЧНО ЗВАЖЕНЕ ПРАВИЛО СУМ¹**

Аналізується внесок пігмі-дипольного резонансу (ПДР) в енергетично зважене правило сум для електричних дипольних гамма переходів (Е1 ЕЗПС) у середніх і важких ядрах з надлишком нейтронів. Порівнюються макроскопічні аналітичні вирази для внесків ПДР в Е1 ЕЗПС з мікроскопічними розрахунками та експериментальними даними для ланцюжків ізотопів нікелю, олова і свинцю. Протестовано аналітичні вирази для обчислення внесків ПДР у Е1 ЕЗПС, як функції кількості приповерхневих нейтронів. Кількість таких нейтронів береться пропорційною товщині нейтронної шкіри. Запропоновано систематики для обчислення внеску ПДР в Е1 ЕЗПС.

Ключові слова: пігмі-дипольний резонанс (ПДР), енергетично зважене правило сум для дипольних електричних переходів (Е1 ЕЗПС), доля ПДР в Е1 ЕЗПС, товщина нейтронної шкіри, кількість нейтронів у приповерхневому прошарку.

1. Вступ

На перебіг різноманітних ядерних процесів може суттєво впливати наявність низькорозташованого колективного стану поблизу енергії зв'язку нейтронів, так званого пігмі-дипольного резонансу (ПДР) [1–4]. У літературі обговорюються різні механізми утворення ПДР. Ми використовуємо макроскопічну інтерпретацію ПДР у нейтронно-надлишкових ядрах, як колективного ізовекторного електричного дипольного збудження, в якому слабкозв'язані «приповерхневі» нейтрони («надлишкові» нейтрони) N_s , що локалізовані переважно у нейтронній шкірі, здійснюють коливання відносно майже симетричного протонно-нейтронного кора ядра із зарядом Z і кількістю нейтронів $N_c = N - N_s$. У даній роботі ПДР розглядається як ізовекторний електричний дипольний резонанс і аналізується його внесок в енергетично зважене правило сум для Е1-переходів.

Середню поведінку та внесок ізовекторних ПДР у Е1 ЕЗПС, $m_{L=1}^1(\text{PDR})$ [5], а також молекулярно-кластерний підхід до їх опису [6–9], у якому кількість приповерхневих нейтронів вважається пропорційною товщині нейтронної шкіри [10–13], нами було проаналізовано в роботах [14, 15]. У даній роботі розглянуто внески ПДР у середніх і важких атомних ядрах з надлишком

нейтронів з урахуванням підходу, що базується на кінетичному рівнянні Власова [13]. Запропоновано та проаналізовано систематики для обчислення внесків ПДР у ЕЗПС з параметрами, підігнаними до мікроскопічних розрахунків та експериментальних даних. Результати порівнюються з експериментальними даними для внесків ПДР у ланцюжках ізотопів нікелю, олова, свинцю з мікроскопічними розрахунками та з обчисленнями, які використовують макроскопічні аналітичні вирази.

**2. Аналіз сили збудження
пігмі-дипольного резонансу**

Внесок ПДР у енергетично зважене правило сум, $m_{L=1}^1(\text{PDR})$, є важливою фізичною характеристикою, оскільки він пропорційний внеску ПДР ($\sigma_{\text{int}}(\text{PDR})$) у проінтегрований переріз поглинання електричних дипольних гамма-квантів σ_{int} [5].

Зазвичай визначають дві величини, що характеризують внесок ПДР у ЕЗПС: 1) відношення, $\bar{s}_p$, внесків в ЕЗПС від ПДР до внеску від гігантського дипольного резонансу (ГДР) ($\sigma_{\text{int}}(\text{GDR})$, $m_{L=1}^1(\text{GDR})$)

$$\bar{s}_p = \frac{m_{L=1}^1(\text{PDR})}{m_{L=1}^1(\text{GDR})} = \frac{\sigma_{\text{int}}(\text{PDR})}{\sigma_{\text{int}}(\text{GDR})} \quad (1)$$

© Автор(и), 2026

Стаття опублікована ІЯД НАН України за умовами відкритого доступу за ліцензією CC BY-NC 4.0

¹ Представлено на XXXIII Щорічній науковій конференції Інституту ядерних досліджень НАН України, Київ, 25–29 травня 2026 р.

і долю, s_p , ПДР стану в ЕЗПС

$$s_p = \frac{m_{L=1}^1(\text{PDR})}{m_{L=1}^1} = \frac{\sigma_{\text{int}}(\text{PDR})}{\sigma_{\text{int}}}. \quad (2)$$

У наближенні, що повне Е1 ЕЗПС є сумою внесків від ПДР та ГДР станів, $m_{L=1}^1 = m_{L=1}^1(\text{GDR}) + m_{L=1}^1(\text{PDR})$, $\sigma_{\text{int}} = \sigma_{\text{int}}(\text{GDR}) + \sigma_{\text{int}}(\text{PDR})$, співвідношення між $\bar{s}_p$ і s_p визначаються за формулами

$$s_p \equiv \frac{m_{L=1}^1(\text{PDR})}{m_{L=1}^1} = \frac{\bar{s}_p}{1 + \bar{s}_p},$$

$$\bar{s}_p \equiv \frac{m_{L=1}^1(\text{PDR})}{m_{L=1}^1(\text{GDR})} = \frac{s_p}{1 - s_p}. \quad (3)$$

Згідно з молекулярно-кластерним правилом сум [6] відношення внеску в ЕЗПС від ПДР до внеску від ГДР пропорційне кількості нейтронів у шкірі і задається виразом

$$\bar{s}_p = \frac{m_{L=1}^1(\text{PDR})}{m_{L=1}^1(\text{GDR})} = \frac{N_s}{N} \frac{Z}{A_c} = \frac{Z}{N} \frac{N_s}{A - N_s}, \quad (4)$$

де $A_c = Z + N - N_s$ кількість нуклонів у корі атомного ядра з масовим числом $A = Z + N$.

Молекулярно-кластерне правило сум (4) є компонентом енергетично зваженого правила сум для Е1 переходів у системі, яка складається з двох кластерів. Він описує лише ту частину Е1-сили, що пов'язана з відносним рухом кластерів. Для ядер з надлишком нейтронів такими двома кластерами ядра (A, Z) є майже симетричний протон-нейтронний кор ($A_1 = A_c = A - N_s, Z_1 = Z$) та нейтронна шкіра ($A_2 = N_s, Z_2 = 0$). Вираз (4) також був отриманий різними методами в роботах [7–9].

Відповідно до робіт [10–15] кількість приповерхневих нейтронів вважаємо пропорційною товщині нейтронної шкіри Δr_{np} , яка є різницею коренів із середньо-квадратичних радіусів $R_{\text{rms},j} = \sqrt{\langle r^2 \rangle_j}$, розподілів нейтронів ($j = n$) і протонів ($j = p$),

$$N_s = N \cdot \frac{\sqrt{15} \cdot \Delta r_{np}}{R_0}, \quad (5)$$

з радіусом $R_0 = 1,15 A^{1/3}$ фм ядра з різким краєм. У результаті формула (4) приймає вигляд

$$\bar{s}_p = \bar{s}_M = \frac{Z}{A - N \cdot \sqrt{15} \cdot \Delta r_{np} / R_0} \frac{\sqrt{15} \cdot \Delta r_{np}}{R_0}. \quad (6)$$

У роботі [15] таке співвідношення отримало назву виразу методу PR MSR (Pethick, Ravenhall + Molecular Sum Rule).

У лептодермічному наближенні $R_0 \gg \Delta r_{np}$ і при $N \cong Z \cong A/2$ співвідношення (6) приймає вигляд

$$\bar{s}_M \cong \bar{s}_{M,a} = \sqrt{15} \frac{Z}{A} \frac{\Delta r_{np}}{R_0} \cong 1,68 \frac{\Delta r_{np}}{A^{1/3}}. \quad (7)$$

У роботі [13] було отримано вираз для внеску s_p ПДР у енергетично зважене правило сум у рамках квазикласичного наближення з використанням кінетичного рівняння Власова у фазовому просторі з умовою дзеркального відбиття частинок від нерухомої поверхні. У наближенні $N \cong Z \cong A/2$ вираз для внеску ПДР у повне значення ЕЗПС, s_p , можна представити у вигляді

$$s_p = s_K = \frac{m_{L=1}^1(\text{PDR})}{m_{L=1}^1} \cong 2,1 \left(\frac{\Delta r_{np}}{R_0} \right)^{3/2}. \quad (8)$$

Далі (8) будемо називати формулою методу PR KEM (Pethick, Ravenhall + Kinetic Equation Method).

Для систематик експериментальних даних і мікроскопічних розрахунків будемо використовувати вираз із залежністю від відношення $\Delta r_{np} / A^{1/3}$ подібно тому, як у формулах (7) і (8):

$$\bar{s}_p \equiv \frac{m_{L=1}^1(\text{PDR})}{m_{L=1}^1(\text{GDR})} = \bar{s}_{\text{sys}} = \delta \left(\frac{\Delta r_{np}}{A^{1/3}} \right)^\gamma,$$

$$s_p \equiv \frac{m_{L=1}^1(\text{PDR})}{m_{L=1}^1} = s_{\text{sys}} = \frac{\bar{s}_{\text{sys}}}{1 + \bar{s}_{\text{sys}}}. \quad (9)$$

Відзначимо, що оскільки значення внеску $\bar{s}_p$ малі, то величини $\bar{s}_p$ і s_p мало відрізняються.

Для обчислення товщини нейтронної шкіри Δr_{np} використовувалася параметризація з нашої роботи [15]:

$$\Delta r_{np} = 0,62 - 0,22 \cdot A^{1/3} + 0,003 \cdot A +$$

$$+ (0,47 \cdot A^{1/3} - 0,009 \cdot A) \cdot I \text{ фм}, \quad (10)$$

де $I = (N - Z) / A$ надлишок нейтронів у ядрі.

Значення параметрів δ, γ у співвідношенні (9) знаходилося підгонкою відношення внесків ПДР до ГДР у ЕЗПС виразами (9) до експериментальних даних [16, 17] ($\bar{s}_{\text{ex}}$) та

значень результатів мікроскопічних обчислень ($\bar{s}_{th}$). Підгонка була виконана методом найменших квадратів з хі-квадрат відхиленням $\chi^2_\alpha = \sum_j w_j (\bar{s}_\alpha(j) - \bar{s}_{ex(th)}(j))^2$, $\alpha = M, K, sys$, де w_j – ваговий множник j -того значення внеску ПДР, а N_Σ – загальна кількість даних. Експериментальні дані було взято з роботи [16],

повне бібліографічне посилання на які наведено в [15], а також із рис. 26 роботи [17], повне бібліографічне посилання на які також наведено в [15]. Ці дані були перераховані на відношення внесків ПДР до ГДР $\bar{s}_{p,exp}$ згідно з виразом (3): $\bar{s}_{p,exp} = s_{p,exp} / (1 - s_{p,exp})$. Вагові коефіцієнти були вибрані сталими $w_j = 1/10^{-4}$. Результати підгонки представлено в таблиці.

Параметри систематик $\bar{s}_{sys,m}$, $\bar{s}_{sys,e}$ (9), відношення внеску ПДР до ГДР стану у ЕЗПС з їх підгонки відповідно до значень мікроскопічних розрахунків і експериментальних даних (наведено в дужках), а також відношення середньоквадратичних відхилень на одне значення кількості внесків $\bar{\chi}^2_\alpha = \chi^2_\alpha / N_\Sigma$ до відповідного середньоквадратичного відхилення $\bar{\chi}^2_{s_M}$ методу PR MSR, (6). Середньоквадратичні відхилення значень за формулою (6) від значень мікроскопічних обчислень (експериментальних даних) дорівнюють $\bar{\chi}^2_{s_M} = 2,8$ (4,0).

Вираз	Значення параметрів або № формули	$\bar{\chi}^2_\alpha / \bar{\chi}^2_M$
$\bar{s}_{sys,m}$, (9) ($\bar{s}_{sys,e}$)	$\delta = 0,37$, $\gamma = 0,55$ ($\delta = 0,37$, $\gamma = 0,78$)	0,45 (0,37)
$\bar{s}_{M,a}$, (7)	$\delta = 1,68$, $\gamma = 1,0$	0,85 (1,45)
$\bar{s}_K$, (8)	(8)	6,65 (0,79)

На рис. 1 порівнюються значення відношення $\bar{s}_p = m^1_{L=1}(PDR)/m^1_{L=1}(GDR)$ внеску стану ПДР до ГДР, $\bar{s}_M$, (6), $\bar{s}_K$, (8), (3) в Е1 енергетично зважене правило сум з результатами мікроскопічних

розрахунків для ізоотопів нікелю, олова, свинцю залежно від параметра нейтронно-протонної асиметрії $I = (N - Z) / A$.

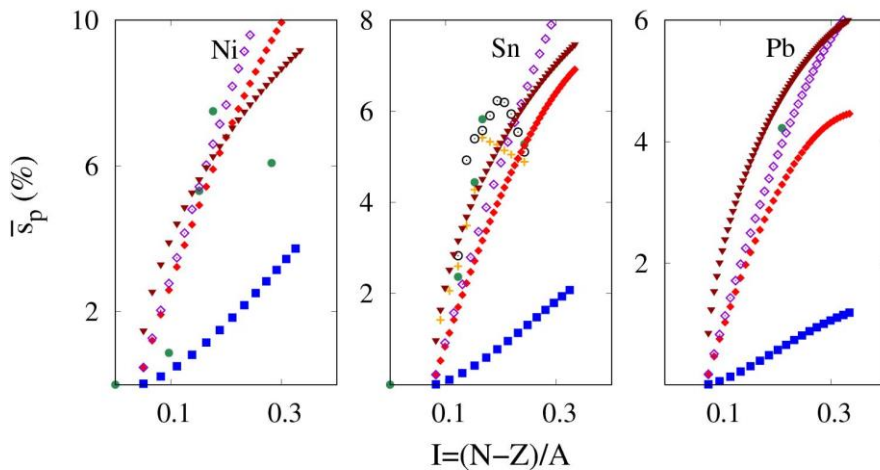


Рис. 1. Порівняння значень відношення $\bar{s}_p = m^1_{L=1}(PDR)/m^1_{L=1}(GDR)$ внеску стану ПДР до ГДР, $\bar{s}_M$, (6), $\bar{s}_K$, (8), (3), в Е1 ЕЗПС з результатами мікроскопічних розрахунків для ізоотопів нікелю, олова, свинцю залежно від параметра нейтронно-протонної асиметрії $I = (N - Z) / A$. Позначення: суцільний червоний ромб $\blacklozenge$ – $\bar{s}_M$ обчислення за формулою (6), контур фіолетового ромба $\blacklozenge$ – $\bar{s}_{M,a}$ обчислення за формулою (7), синій квадрат $\blacksquare$ – $\bar{s}_K$ формули (8), (3); перевернутий коричневий трикутник $\blacktriangledown$ – $\bar{s}_{sys,m}$ систематика (9) з параметрами підгонки мікроскопічних обчислень; заштриховане коло $\bullet$ – результати з [18], коло $\circ$ – [19], хрестики $\times$ – [20]. (Див. кольоровий рисунок на сайті журналу.)

З рис. 1 видно, що результати обчислень відношень внесків ПДР до ГДР за аналітичними формулами (8) кінетичної теорії з (3) не перевищує $\sim 3\%$ і в декілька разів є меншими від значень за методом молекулярних кластерів та мікроскопічних розрахунків і їхньої систематики (9). Значення відношень внесків $\bar{s}_p$, обчислених за аналітичними виразами та систематикою, монотонно зростають з надлишком нейтронів, як і у мікроскопічних обчисленнях при малих надлишках нейтронів. Відзначимо, що згідно з мікроскопічними розрахунками для ізотопів нікелю і олова з великим надлишком нейтронів відношення внесків ПДР до ГДР зменшується зі збільшенням такого надлишку.

Видно, що в середньому із статистичної точки зору систематика (9) краще описує тенденцію

поведінки експериментальних даних і мікроскопічних обчислень відносних внесків $\bar{s}_p$, ніж аналітичні вирази, а співвідношення (6) трохи краще описує такі значення, ніж вираз (8). Обчислення за формулами (6) і (7) дуже близькі.

На рис. 2 порівнюються значення відношення $\bar{s}_p = m_{L=1}^1(\text{PDR})/m_{L=1}^1(\text{GDR})$ внеску стану ПДР до ГДР в Е1 ЕЗПС на лінії бета-стабільності. Внески обчислювалися згідно з виразами (6)–(8) та систематикою (9) з параметрами з таблиці, що були визначені з підгонки мікроскопічних розрахунків і експериментальних даних. Товщина нейтронної шкіри Δr_{np} обчислювалася з параметрами ((16с) з [14]), а лінія бета-стабільності визначалася за формулою Гріна [21–23]: $I = 0,4A/(200 + A)$.

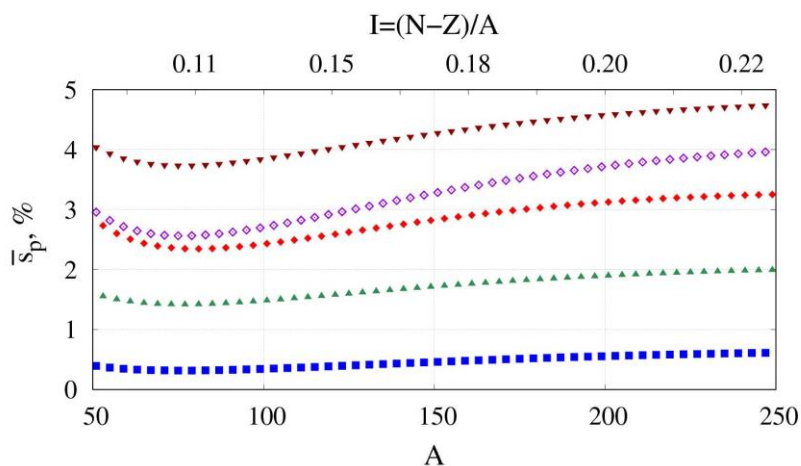


Рис. 2. Залежність відношення $\bar{s}_p = m_{L=1}^1(\text{PDR})/m_{L=1}^1(\text{GDR})$ внесків станів ПДР та ГДР в Е1 ЕЗПС від масового числа на лінії бета-стабільності. Позначення: суцільний червоний ромб $\blacklozenge$ – $\bar{s}_M$ обчислення за формулою (6); контур фіолетового ромба $\diamond$ – $\bar{s}_{M,a}$ обчислення за формулою (7); синій квадрат $\blacksquare$ – $\bar{s}_K$ розрахунок за (8) + (3); трикутник $\blacktriangle$ – $\bar{s}_{sys,e}$ формула (9) з параметрами δ, γ , підгнаними за експериментальними даними; перевернутий трикутник $\blacktriangledown$ – $\bar{s}_{sys,m}$ формула (9) з параметрами δ, γ , підгнаними за мікроскопічними обчисленнями. (Див. кольоровий рисунок на сайті журналу.)

Як видно, для ядер на лінії бета-стабільності відношення внесків ПДР до ГДР за систематикою експериментальних даних становить $\sim 1,5\text{--}2,0\%$, що приблизно вдвічі менше за відповідні значення, отримані за систематикою мікроскопічних розрахунків. Значення $\bar{s}_p$ за аналітичними формулами методу молекулярного правила сум методу PR MSR (формули (6), (7)) є дуже близькими і приблизно в два рази більшими за систематики експериментальних даних.

На рис. 3 порівнюються внески ПДР станів у Е1 ЕЗПС, обчислених за формулами (6)–(9) з експериментальними даними з [16, 17].

Відзначимо, що відсоток експериментальних даних, що потрапляють в інтервал $|s_\alpha - s_{p,\text{exp}}|/s_{p,\text{exp}} \leq 0,5$ для обчислень за підходом типу α такий: $s_{sys,e}$ – 61 %, s_M – 43 %, $s_{M,a}$ – 35 %, s_K – 9 %, $s_{sys,m}$ – 17 %. Із цих обчислень та рис. 3 видно, що параметризації s_M і $s_{M,a}$ добре описують експериментальні значення навіть без підгонки, хоча при малих Z і великих нейтронних надлишках вони дають доволі великі внески ПДР станів у Е1 ЕЗПС, ніж підгонки за систематиками $s_{sys,m}$. Систематика $s_{sys,m}$ у цілому призводить до більших значень внесків s_p , ніж ті, що відповідають експериментальним даним.

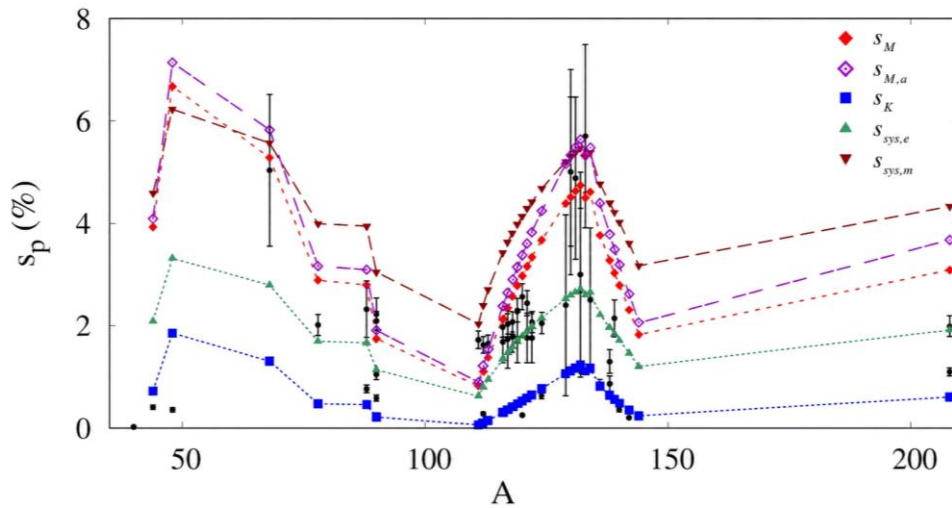


Рис. 3. Порівняння внесків ПДР станів у Е1 ЕЗПС за формулами (6)–(9) з експериментальними даними з робіт [16, 17]. Позначення: чорні точки (з похибками або без) – $s_{p,exp}$ експериментальні дані; суцільний червоний ромб $\blacklozenge$ – s_M метод PR MSR (6)+(3); контурний фіолетовий ромб $\blacklozenge$ – $s_{M,a}$, (7)+(3); синій квадрат $\blacksquare$ – s_K метод PR КЕМ, (8); зелений трикутник $\blacktriangle$ – $s_{sys,e}$ систематика (9) з параметрами δ, γ з підгонки експериментальних даних; коричневий перевернутий трикутник $\blacktriangledown$ – $s_{sys,m}$ систематика (9) з параметрами δ, γ підгонки мікроскопічних обчислень. Для наочності обчислення одного типу з'єднані лініями. (Див. кольоровий рисунок на сайті журналу.)

Експериментальні значення $s_{p,exp}$ і значення систематики $s_{sys,e}$ виявилися меншими за мікроскопічні оцінки. Підгонка за системою (9) з параметрами, отриманими по мікроскопічних даних, приблизно в 2 рази дає більші значення, ніж підгонка параметрів по наявних експериментальних даних. У цілому в середніх та важких атомних ядрах доля ПДР у Е1 ЕЗПС не перевищує $\sim 5\%$, а її значення за аналітичними виразами методу молекулярного кластерного правила сум і кінетичного рівняння є більш ніж у два рази меншими, ніж експериментальні дані.

Слід відзначити, що існують систематичні похибки при знаходженні як експериментальних, так і мікроскопічних значень внеску ПДР в ЕЗПС. Зокрема низькоенергетична частина збудження ізоскалярного дипольного резонансу розташована поблизу ізовекторного Е1 ПДР і експериментальні дані можуть бути сумішшю Е1 ізоскалярних та ізовекторних збуджень. Теоретичні значення ПДР правила сум залежать від інтервалу, на якому вони обчислюються. У даній роботі ці ефекти вважаються малими зі статистичної точки зору.

3. Результати та висновки

Проведено порівняння аналітичних формул методу молекулярного кластерного правила сум і кінетичного рівняння для відносного внеску ПДР в енергетично зважене правило сум для елект-

ричних дипольних переходів з мікроскопічними розрахунками та експериментальними даними для ізоотопів нікелю, олова і свинцю. Аналітичні оцінки дають порядок величини долі ПДР, але зазвичай виявляються нижчими за експериментальні дані й мікроскопічні підходи.

У цілому в середніх та важких атомних ядрах частка ПДР в Е1 ЕЗПС не перевищує $\sim 5\%$, а її значення, отримані згідно з аналітичними виразами методу молекулярного кластерного правила сум і кінетичного рівняння, є більш ніж удвічі меншими за експериментальні дані. Значення мікроскопічних обчислень долі ПДР у Е1 ЕЗПС у середніх і важких ядрах приблизно у два рази більші, ніж експериментальні дані. Запропоновано спрощені вирази для обчислення долі ПДР Е1 ЕЗПС з параметрами, підігнаними по мікроскопічних розрахунках та експериментальних даних, які статистично краще узгоджуються з даними, ніж відповідні аналітичні вирази. Такі вирази можна використовувати для оцінки внеску ПДР у Е1 ЕЗПС за відсутності експериментальних даних і мікроскопічних обчислень.

В. А. Плюйко і О. М. Горбаченко вдячні фонду НФДУ за часткову підтримку досліджень (грант НФДУ 2023.05/0024 «Вирішення сучасних проблем хімії, біомедицини, фізики та матеріалознавства з використанням центру високопродуктивних обчислень і машинного навчання»).

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ / REFERENCES

1. M. Arnould, S. Goriely, K. Takahashi. The r-process of stellar nucleosynthesis: Astrophysics and nuclear physics achievements and mysteries. *Phys. Rep.* **450** (2007) 97.
2. E.G. Lanza et al. Theoretical studies of pygmy resonances. *Progr. Part. Nucl. Phys.* **129** (2023) 104006.
3. A. Zilges et al. Photonuclear reactions – From basic research to applications. *Prog. Part. Nucl. Phys.* **122** (2022) 103903.
4. V.Yu. Denisov. Hydrodynamical model of isoscalar and isovector giant dipole resonances and pygmy dipole resonance in nuclei with the neutron skin. *Nucl. Phys. A* **1074** (2026) 123456.
5. E. Lipparini, S. Stringari. Sum rules and giant resonances in nuclei. *Phys. Rep.* **175** (1989) 103.
6. Y. Alhassid, M. Gai, G.F. Bertsch. Radiative width of molecular-cluster states. *Phys. Rev. Lett.* **49** (1982) 1482.
7. Y. Suzuki, K. Ikeda, H. Sato. New type of dipole vibration in nuclei. *Prog. Theor. Phys.* **83** (1990) 180.
8. P. Van Isacker, M.A. Nagarajan, D.D. Warner. Effect of the neutron skin on collective states of nuclei. *Phys. Rev. C* **45** (1992) R13.
9. H. Kurasawa, T. Suzuki. A sum-rule constraint on the soft dipole mode. *Prog. Theor. Phys.* **94** (1995) 931.
10. C.J. Pethick, D.G. Ravenhall. The dependence of neutron skin thickness and surface tension on neutron excess. *Nucl. Phys. A* **606** (1996) 173.
11. В.М. Коломієць, А.І. Санжур. Об'ємна та поверхнева енергія симетрії для ядер, віддалених від долини стабільності. *Ядерна фізика та енергетика* **2** (2007) 7. / V.M. Kolomietz, A.I. Sanzhur. Bulk and surface symmetry energy for the nuclei far from the valley of stability. *Nucl. Phys. At. Energy* **2** (2007) 7. (Ukr).
12. V.M. Kolomietz, A.I. Sanzhur. Equation of state and symmetry energy within the stability valley. *Eur. Phys. J. A* **38** (2008) 345.
13. V.I. Abrosimov, O.I. Davidovskaya. Semiclassical model of dipole pygmy-resonance in nuclei with neutron excess. *Ukr. J. Phys.* **54**(11) (2009) 1068.
14. В.А. Плюйко, О.М. Горбаченко, Н.О. Романовський. Систематика енергій дипольних пігмі резонансів у середніх і важких атомних ядрах з надлишком нейтронів. *Ядерна фізика та енергетика* **26**(2) (2025) 105. / V.A. Plujko, O.M. Gorbachenko, N.O. Romanovskiy. Systematics of pygmy dipole resonance energies in medium and heavy atomic nuclei with neutron excess. *Nucl. Phys. At. Energy* **26**(2) (2025) 105. (Ukr)
15. V.A. Plujko, O.M. Gorbachenko, N.O. Romanovskiy. Systematics of characteristics of pygmy dipole resonances in medium-heavy and heavy atomic nuclei with neutron excess. *Phys. Rev. C* **113** (2026) 044322.
16. M. Markova, P. von Neumann-Cosel, E. Litvinova. Systematics of the low-energy electric dipole strength in the Sn isotopic chain. *Phys. Lett. B* **860** (2025) 139216.
17. D. Savran, T. Aumann, A. Zilges. Experimental studies of the pygmy dipole resonance. *Prog. Part. Nucl. Phys.* **70** (2013) 210.
18. D. Vretenar et al. Collectivity of the low-lying dipole strength in relativistic random approximation. *Nucl. Phys. A* **692** (2001) 496.
19. N. Paar et al. Quasiparticle random phase approximation based on the relativistic Hartree–Bogoliubov model. *Phys. Rev. C* **67** (2003) 034312.
20. J. Piekarowicz. Pygmy dipole resonance as a constraint on the neutron skin of heavy nuclei. *Phys. Rev. C* **73** (2006) 044325.
21. A.E.S. Green. The systematics of nuclear energies. *Phys. Rev.* **83** (1951) 1248.
22. A.E.S. Green, N.A. Engler. Mass surfaces. *Phys. Rev.* **91** (1953) 40.
23. P. Moller et al. Nuclear ground-state masses and deformations. *At. Data Nucl. Data Tables* **59** (1995) 185.

V. A. Plujko*, O. M. Gorbachenko, N. O. Romanovskiy

Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

*Corresponding author: plujko@gmail.com

SYSTEMATICS OF THE FRACTION OF PYGMY DIPOLE RESONANCES
IN THE ENERGY-WEIGHTED SUM RULE

Fraction of the pygmy dipole resonance (PDR) in the energy-weighted sum rule for electric dipole gamma transitions (E1 EWSR) in medium-heavy and heavy nuclei with an excess of neutrons is analyzed. Macroscopic analytical expressions for the PDR fractions are compared with microscopic calculations and experimental data for isotopic chains of nickel, tin, and lead. Analytical expressions for calculating the PDR fractions of the E1 EWSR as a function of the number of surface neutrons are tested. The number of such neutrons is considered proportional to the thickness of the neutron skin. Systematics for the PDR fraction of the E1 EWSR are proposed.

Keywords: pygmy dipole resonance (PDR), energy-weighted sum rule for electric dipole transitions (E1 EWSR), PDR fraction of the E1 EWSR, neutron skin thickness, number of surface neutrons.

Надійшла / Received 04.07.2026