

М. А. Бслошенко\*

*Інститут ядерних досліджень НАН України, Київ, Україна*\*Відповідальний автор: [Beloshenko@gmail.com](mailto:Beloshenko@gmail.com)

## ВИСОКОЧАСТОТНІ ПОЛЯ У ЗАМАГНІЧЕНОМУ ПЛАЗМОВОМУ ЦИЛІНДРІ З ПРИОСЬОВОЮ ПОРОЖНИНОЮ, ЗБУДЖУВАНОМУ АЗИМУТАЛЬНИМ ВЧ-СТРУМОМ

Розглядається задача про розповсюдження електромагнітних хвиль у плазмовому циліндрі з циліндричною порожниною вздовж осі. В аксіальному напрямку розглядається трубчастий розряд, обмежений провідними стінками. Задача зводиться до системи шести диференціальних рівнянь на комплексні амплітуди полів і, зрештою, до диференційного рівняння четвертого порядку з оператором Бесселя та квадратом цього оператора на повздовжню комплексну амплітуду електричного поля у плазмі. Це рівняння (за виведенням) містить припущення однорідної плазми (компоненти тензора діелектричної проникливості не залежать від радіуса). Але існує інше (більш загальне) рівняння для неоднорідної плазми, придатне до його розв'язання методом скінченних різниць. Проте, перехід до скінченних різниць дає громіздкі вирази, що змушує обмежитися аналітичним розв'язком задачі з трубчастим розрядом лише у випадку однорідної плазми.

*Ключові слова:* тензор діелектричної проникливості, структура хвильових полів, геліконні хвилі, плазмовий циліндр з приосьовою порожниною.

### 1. Вступ

Геліконні розряди, які збуджуються циркулярно поляризованими хвилями (геліконами) у замагніченій плазмі, є найбільш ефективними серед безелектродних джерел низькотемпературної плазми. Ці розряди широко використовуються у виробництві приладів мікроелектроніки та є перспективними в інших застосуваннях і тому продовжують активно досліджуватися [1–3]. Тривалий час вони вивчаються як в багатьох закордонних лабораторіях (США, Австралія, Японія), так і в Інституті ядерних досліджень (ІЯД) НАН України. Зокрема, у відділі фізики плазми та плазмових технологій ІЯД НАН України досліджувалися геліконні розряди, збуджувані різними типами індукційних антен у зовнішніх магнітних полях різної будови, вивчалися властивості утвореної розрядом плазми [4–6]. Разом з тим, у світі продовжуються пошуки інших конфігурацій джерел плазми на основі геліконного розряду, пристосованих для різноманітних потреб. У роботі [7] було запропоновано і практично реалізовано систему, що складається із вміщеного у повздовжнє магнітне поле плазмового циліндра з приосьовою порожниною. В аксіальному напрямі (вздовж магнітного поля) циліндр обмежено двома поперечними провідними стінками. Високочастотний розряд у плазмі збуджується за допомогою кільцевої індукційної антени з ВЧ-струмом, розміщеної у внутрішній порож-

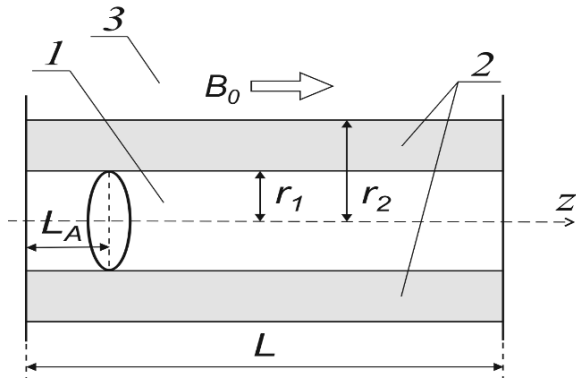
нині. Така антена в області частот між іонною та електронною циклотронними частотами може генерувати у замагніченій плазмі азимутально-симетричну моду геліконних хвиль  $m = 0$ .

Одним з важливих питань при теоретичному розгляді такого пристрою є з'ясування структури хвильових полів, які можуть розповсюджуватись у такій системі. Метод розв'язання – метод комплексних амплітуд – ґрунтується на припущенні, що всі перехідні процеси в плазмі вже завершилися. Передбачається, що результати роботи будуть використані для аналізу хвильових полів у геліконному розряді, частота розповсюдження яких  $\omega$  значно перевищує нижньогібридну частоту  $\omega \gg \omega_{LH} = \sqrt{\omega_{ci}\omega_{ce}}$ . Термін «замагнічений» у даному випадку означає наявність у плазмі магнітного поля, що істотно впливає на розповсюдження електромагнітних хвиль. Після підстановки у рівняння Максвела (в циліндричній системі координат) виразів для компонент полів з комплексними амплітудами, які (вирази) задовольняють граничним умовам, а також після масштабування по радіусу, отримуємо систему із шести диференціальних рівнянь на комплексні амплітуди полів у плазмі. Таким чином, задача полягає у визначенні залежності комплексних амплітуд полів від радіуса. Ця система зводиться до диференційного рівняння четвертого порядку з оператором Бесселя та квадратом цього оператора на повздовжню комплексну амплітуду електричного поля у пла-

змі. Це рівняння (за виведенням) містить припущення однорідної плазми (компоненти тензора діелектричної проникливості не залежать від радіуса). Але існує інше, більш загальне, рівняння для неоднорідної плазми, придатне до розв'язання методом скінчених різниць. У цьому випадку маємо громіздкі вирази і перехід до скінчених різниць призводить до громіздких виразів, що змушує обмежити розв'язання задачі з приосьовою порожниною лише випадком однорідної плазми. Приклади аналітичного розв'язання задачі з розрядом трубчастої конфігурації у літературі автору не відомі. Задача з хвилеводом, заповненим плазмою та зануреним у магнітне поле, розв'язана у [8]. Компоненти тензора діелектричної проникливості плазми взято з монографії [2]. Вони отримані в рамках дворідинної гідродинамічної моделі холодної плазми, у якій враховуються лише зіткнення електронів з нейтральними частинками.

## 2. Основна частина

Метою цієї роботи є отримання аналітичних виразів для комплексних амплітуд полів у однорідному плазмовому циліндрі з приосьовою циліндричною порожниною – у трубчастому розряді. Схематично розглядувану систему зображено на рисунку.



Схематичне зображення системи (трубчастого розряду).

$r_1$  – радіус внутрішньої порожнини,  $r_2$  – зовнішній радіус плазмового циліндра,  $L$  – довжина розряду,  $L_A$  – відстань антени від краю системи. Радіус кільцевої індукційної збуджуючої антени дорівнює радіусу внутрішньої порожнини  $r_1$ . Зовнішнє магнітне поле  $B_0$  спрямоване вздовж осі  $Z$ .

Трубчастий розряд складається з трьох частин – вакууму в зовнішній області і в приосьовій порожнині та самого плазмового циліндра, зануреного у поздовжнє магнітне поле  $B_0$  і обмеженого двома поперечними провідними площинами.

Хвилі в плазмі збуджуються за допомогою кільцевої індукційної антени, розміщеної у внутрішній порожнині. Вихідними рівняннями для полів є рівняння Максвелла

$$\text{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1)$$

$$\text{rot}\vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}_{ext},$$

які у циліндричній системі координат мають такий вигляд:

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \theta} - \frac{\partial E_\theta}{\partial z} = -\frac{1}{c} \frac{\partial B_r}{\partial t} \\ \frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} = -\frac{1}{c} \frac{\partial B_\theta}{\partial t} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r E_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial \theta} = -\frac{1}{c} \frac{\partial B_z}{\partial t} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial B_z}{\partial \theta} - \frac{\partial B_\theta}{\partial z} = \frac{1}{c} \frac{\partial D_r}{\partial t} \\ \frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} = \frac{1}{c} \frac{\partial D_\theta}{\partial t} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r B_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial B_r}{\partial \theta} = \frac{1}{c} \frac{\partial D_z}{\partial t} \end{cases} \quad (2)$$

Слід зауважити, що система (2) є еквівалентною до системи (10) роботи [9], яка в свою чергу є основою коду HELIC [10].

До розв'язків цих рівнянь застосовують умови зшивки (3) комплексних амплітуд на межах різних областей системи.

$$\begin{aligned} D_{2r} \Big|_{r=\frac{\omega}{c} r_1} &= D_{1r} \Big|_{r=\frac{\omega}{c} r_1} \\ E_{2\theta} \Big|_{r=\frac{\omega}{c} r_1} &= E_{1\theta} \Big|_{r=\frac{\omega}{c} r_1} \\ E_{2z} \Big|_{r=\frac{\omega}{c} r_1} &= E_{1z} \Big|_{r=\frac{\omega}{c} r_1} \\ B_{2\theta} \Big|_{r=\frac{\omega}{c} r_1} &= B_{1\theta} \Big|_{r=\frac{\omega}{c} r_1} \\ B_{2z} \Big|_{r=\frac{\omega}{c} r_1} &= \left( -\frac{4\pi i}{c} + B_{1z} \right) \Big|_{r=\frac{\omega}{c} r_1} \\ D_{3r} \Big|_{r=\frac{\omega}{c} r_2} &= D_{2r} \Big|_{r=\frac{\omega}{c} r_2} \\ E_{3\theta} \Big|_{r=\frac{\omega}{c} r_2} &= E_{2\theta} \Big|_{r=\frac{\omega}{c} r_2} \\ E_{3z} \Big|_{r=\frac{\omega}{c} r_2} &= E_{2z} \Big|_{r=\frac{\omega}{c} r_2} \\ B_{3\theta} \Big|_{r=\frac{\omega}{c} r_2} &= B_{2\theta} \Big|_{r=\frac{\omega}{c} r_2} \\ B_{3z} \Big|_{r=\frac{\omega}{c} r_2} &= B_{2z} \Big|_{r=\frac{\omega}{c} r_2} \end{aligned} \quad (3)$$

У цих виразах цифрові індекси 1 і 3 при комплексних амплітудах позначають вакуумні частини трубчастого розряду, а індекс 2 відноситься до області, зайнятою плазмою. Крім того, проведено масштабування по радіусу ( $r = \frac{c}{\omega} \rho$ , далі для спрощення викладок замість  $\rho$  пишемо  $r$ ). Загальні вирази для електричного та магнітного полів у циліндричних координатах беремо у вигляді

$$\begin{cases} E_r = \sum_{l,m} E_r^{(lm)}(r) \sin(k_l z) e^{im\theta - i\omega t} + c.c \\ E_\theta = \sum_{l,m} i E_\theta^{(lm)}(r) \sin(k_l z) e^{im\theta - i\omega t} + c.c \\ E_z = \sum_{l,m} E_z^{(lm)}(r) \cos(k_l z) e^{im\theta - i\omega t} + c.c \\ B_r = \sum_{l,m} B_r^{(lm)}(r) \cos(k_l z) e^{im\theta - i\omega t} + c.c \\ B_\theta = \sum_{l,m} i B_\theta^{(lm)}(r) \cos(k_l z) e^{im\theta - i\omega t} + c.c \\ B_z = \sum_{l,m} B_z^{(lm)}(r) \sin(k_l z) e^{im\theta - i\omega t} + c.c \end{cases} \quad (4)$$

Рівняння (2) не містить зовнішніх струмів  $j_{ext}$  оскільки надалі кільцевий струм враховується в умовах зшивки (3). Вираз для  $\tilde{i}$  отримується після двократного інтегрування умови зшивки для  $Z$ -ої компоненти магнітного поля по  $z$  і по азимутальному куту  $\theta$ , зі струмом антени  $i = I_0 \cos(\omega t) \delta(z - z_A)$ :

$$\tilde{i} = \frac{I_0}{L} \sin(k_l z_A) \delta_{m0},$$

де  $\delta_{m0}$  – символ Кронекера.

З рівнянь Максвела (2) у плазмовій області розряду після підстановки виразів (4) для переходу до комплексних амплітуд, які задовольняють граничним умовам, отримуємо систему (5) із шести диференціальних рівнянь на комплексні амплітуди полів у плазмі:

$$\begin{cases} \frac{m}{r} E_z^{(lm)}(r) - N_l E_\theta^{(lm)}(r) = B_r^{(lm)}(r) \\ -N_l E_r^{(lm)}(r) + \frac{\partial E_z^{(lm)}(r)}{\partial r} = B_\theta^{(lm)}(r) \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r E_\theta^{(lm)}(r)] - \frac{m}{r} E_r^{(lm)}(r) = B_z^{(lm)}(r) \\ \frac{m}{r} B_z^{(lm)}(r) + N_l B_\theta^{(lm)}(r) = -\varepsilon_1 E_r^{(lm)}(r) + \varepsilon_2 E_\theta^{(lm)}(r) \\ N_l B_r^{(lm)}(r) + \frac{\partial B_z^{(lm)}(r)}{\partial r} = \varepsilon_2 E_r^{(lm)}(r) - \varepsilon_1 E_\theta^{(lm)}(r) \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r B_\theta^{(lm)}(r)] - \frac{m}{r} B_r^{(lm)}(r) = -\varepsilon_3 E_z^{(lm)}(r) \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} D_r^{(lm)} = \varepsilon_1 E_r^{(lm)} - \varepsilon_2 E_\theta^{(lm)} \\ D_\theta^{(lm)} = -\varepsilon_2 E_r^{(lm)} + \varepsilon_1 E_\theta^{(lm)} \\ D_z^{(lm)} = \varepsilon_3 E_z^{(lm)} \end{cases}, \quad (6)$$

де введено позначення  $N_l = \frac{ck_l}{\omega}$ .

В якості характеристик плазмового середовища використано компоненти тензора діелектричної проникності плазми  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_3$ , одержані з дворідинної гідродинамічної моделі холодної плазми [2]:

$$\varepsilon_1 = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 + i\nu_e \omega} \left[ 1 + \frac{\omega_{ce}^2}{(\omega + i\nu_e)^2 - \omega_{ce}^2} \right], \quad (7)$$

$$\varepsilon_2 = -\frac{i\omega_{pe}^2}{\omega} \frac{\omega_{ce}}{(\omega + i\nu_e)^2 - \omega_{ce}^2}, \quad (8)$$

$$\varepsilon_3 = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega + i\nu_e)}, \quad (9)$$

де  $\omega_{pe}$  та  $\omega_{ce}$  – відповідно плазмова та електронно-циклотронна частоти,  $\nu_e$  – частота зіткнень електронів з нейтралами. Оскільки розглядувані частоти значно перевищують нижньогібридну частоту, іони можна вважати нерухомими. Ці компоненти тензора входять також у вирази (6) для комплексних амплітуд електричної індукції.

Система (5) із шести диференціальних рівнянь зводиться до диференціального рівняння (10) з оператором Бесселя (11) та квадратом цього оператора на повздовжню комплексну амплітуду  $E_z$  електричного поля у плазмі:

$$L^2 E_z - \frac{\varepsilon_2^2 + (N_l^2 - \varepsilon_1)(\varepsilon_1 + \varepsilon_3)}{\varepsilon_1} \hat{L} E_z + \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} \left[ (\varepsilon_1 - N_l^2)^2 - \varepsilon_2^2 \right] E_z = 0, \quad (10)$$

$$\hat{L} = \frac{1}{r} d_r r d_r - \frac{m^2}{r^2}. \quad (11)$$

Послідовність зведення.

$$\begin{cases} \frac{m}{r} E_z - N_l E_\theta = B_r \\ -N_l E_r + \frac{\partial E_z}{\partial r} = B_\theta \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_\theta) - \frac{m}{r} E_r = B_z \\ \frac{m}{r} B_z + N_l B_\theta = -\varepsilon_1 E_r + \varepsilon_2 E_\theta \\ N_l B_r + \frac{\partial B_z}{\partial r} = \varepsilon_2 E_r - \varepsilon_1 E_\theta \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_\theta) - \frac{m}{r} B_r = -\varepsilon_3 E_z \end{cases}. \quad (12)$$

Будемо зводити систему (12) до одного диференціального рівняння четвертого порядку. Після підстановки  $B_r$  та  $B_\theta$  з перших двох рівнянь у всі інші рівняння (окрім третього) системи (12) отримаємо систему рівнянь (13).

$$\begin{cases} \frac{1}{r}d_r(rE_\theta) - \frac{m}{r}E_r = B_z \\ \frac{m}{r}B_z + N_l d_r E_z + (\varepsilon_1 - N_l^2)E_r = \varepsilon_2 E_\theta \\ \frac{N_l m}{r}E_z + (\varepsilon_1 - N_l^2)E_\theta + d_r B_z = \varepsilon_2 E_r \\ \frac{1}{r}d_r r d_r E_z - \frac{N_l}{r}d_r r E_r - \frac{m^2}{r^2}E_z + \frac{N_l m}{r}E_\theta = -\varepsilon_3 E_z \end{cases} \quad (13)$$

Випишемо окремо перше та четверте рівняння системи (13).

$$\frac{1}{r}d_r(rE_\theta) - \frac{m}{r}E_r = B_z, \quad (14)$$

$$\frac{1}{r}d_r r d_r E_z - \frac{N_l}{r}d_r r E_r - \frac{m^2}{r^2}E_z + \frac{N_l m}{r}E_\theta = -\varepsilon_3 E_z. \quad (15)$$

Розв'яжемо систему (16) з двох рівнянь, яка залишиться після виділення першого та четвертого рівняння із системи (13).

$$\begin{cases} \frac{m}{r}B_z + N_l d_r E_z + (\varepsilon_1 - N_l^2)E_r = \varepsilon_2 E_\theta \\ \frac{N_l m}{r}E_z + (\varepsilon_1 - N_l^2)E_\theta + d_r B_z = \varepsilon_2 E_r \end{cases} \quad (16)$$

Розв'язок системи (16), наприклад для  $E_r$ , проводиться так. Виразивши  $E_\theta$  з першого рівняння системи (16) та підставивши у друге рівняння системи (16), отримуємо вираз (17).

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 \frac{N_l m}{r}E_z + \frac{m}{r}(\varepsilon_1 - N_l^2)B_z + \\ + (\varepsilon_1 - N_l^2)N_l d_r E_z + \varepsilon_2 d_r B_z = V E_r. \end{aligned} \quad (17)$$

Варто зазначити, що у рівнянні (17) вводиться позначення  $V = \varepsilon_2^2 - (\varepsilon_1 - N_l^2)^2$ , яке буде використовуватися надалі. Таким чином, застосовуючи аналогічні міркування, після розв'язання системи (16), отримуються вирази (18) для  $E_r$  та  $E_\theta$ .

$$\begin{aligned} E_r = \frac{\varepsilon_2 N_l m}{V r}E_z + \frac{\varepsilon_1 - N_l^2}{V} \frac{m}{r}B_z + \\ + \frac{(\varepsilon_1 - N_l^2)N_l}{V}d_r E_z + \frac{\varepsilon_2}{V}d_r B_z, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} E_\theta = \frac{\varepsilon_2 m}{V r}B_z + \frac{\varepsilon_2 N_l}{V}d_r E_z + \\ + \frac{(\varepsilon_1 - N_l^2)N_l}{V} \frac{m}{r}E_z + \frac{\varepsilon_1 - N_l^2}{V}d_r B_z. \end{aligned} \quad (19)$$

Підставивши у (14) вирази (18), отримаємо такий вираз (19). Проведемо зведення подібних доданків, домноження на  $Vr$ , введення оператора (20).

$$\begin{aligned} -\varepsilon_2 N_l m^2 E_z - (\varepsilon_1 - N_l^2)m^2 B_z + \\ + \varepsilon_2 N_l \hat{L} E_z + (\varepsilon_1 - N_l^2)\hat{L} B_z = V r^2 B_z \end{aligned} \quad (20)$$

$$\hat{L} = r d_r r d_r.$$

Підставивши у (15) вирази (18), отримаємо такий вираз (21). Помноживши на  $r^2$ , розкривши квадратні дужки, звівши подібні доданки.

$$\begin{aligned} \hat{L} \left\{ \left[ V - N_l^2 (\varepsilon_1 - N_l^2) \right] E_z - N_l \varepsilon_2 B_z \right\} + \\ + \left[ V (r^2 \varepsilon_3 - m^2) + N_l^2 (\varepsilon_1 - N_l^2) m^2 \right] E_z + \\ + N_l \varepsilon_2 m^2 B_z = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Після перепозначення оператор (20) отримуємо систему двох рівнянь (23).

$$\hat{L} = \frac{1}{r} d_r r d_r - \frac{m^2}{r^2}, \quad (22)$$

$$\begin{cases} \hat{L} \left[ N_l \varepsilon_2 E_z + (\varepsilon_1 - N_l^2) B_z \right] = V B_z \\ \hat{L} \left\{ \left[ V - N_l^2 (\varepsilon_1 - N_l^2) \right] E_z - N_l \varepsilon_2 B_z \right\} = -\varepsilon_3 V E_z. \end{cases} \quad (23)$$

Рівняння (24) отримується із системи (23) через домноження другого рівняння на сталу  $A$  і додаванням до першого рівняння.

$$\begin{aligned} \left\{ N_l \varepsilon_2 + A \left[ V - N_l^2 (\varepsilon_1 - N_l^2) \right] \right\} \hat{L} E_z + \\ + \left[ (\varepsilon_1 - N_l^2) - A N_l \varepsilon_2 \right] \hat{L} B_z = V B_z - A V \varepsilon_3 E_z. \end{aligned} \quad (24)$$

Якщо у рівнянні (24) накласти додаткову умову  $(\varepsilon_1 - N_l^2) - A N_l \varepsilon_2 = 0$ , з якої отримується

$$A = -\frac{N_l^2 - \varepsilon_1}{N_l \varepsilon_2}, \text{ то отримується рівняння (25).}$$

$$\left\{ N_l \varepsilon_2 - \frac{N_l^2 - \varepsilon_1}{N_l \varepsilon_2} \left[ V - N_l^2 (\varepsilon_1 - N_l^2) \right] \right\} \hat{L} E_z =$$

$$= VB_z + \frac{N_l^2 - \varepsilon_1}{N_l \varepsilon_2} V \varepsilon_3 E_z. \quad (25)$$

З рівняння (25) отримується вираз (26) для  $B_z$ , після підстановки цього виразу у друге рівняння отримується рівняння (27) четвертого порядку на  $E_z$ .

$$B_z = \frac{1}{V} \left\{ N_l \varepsilon_2 - \frac{N_l^2 - \varepsilon_1}{N_l \varepsilon_2} [V - N_l^2 (\varepsilon_1 - N_l^2)] \right\} L E_z - \frac{N_l^2 - \varepsilon_1}{N_l \varepsilon_2} \varepsilon_3 E_z, \quad (26)$$

$$\left[ V - N_l^2 (\varepsilon_1 - N_l^2) \right] \hat{L} E_z - \frac{1}{V} \left\{ \varepsilon_2^2 N_l^2 + (\varepsilon_1 - N_l^2) [V - N_l^2 (\varepsilon_1 - N_l^2)] \right\} \hat{L}^2 E_z - (\varepsilon_1 - N_l^2) \varepsilon_3 \hat{L} E_z = -V \varepsilon_3 E_z. \quad (27)$$

Після певних перетворень з (27) отримуємо (28). Серед яких домноження на  $V$  та зведення подібних доданків.

$$L^2 E_z - \frac{\varepsilon_2^2 + (N_l^2 - \varepsilon_1)(\varepsilon_1 + \varepsilon_3)}{\varepsilon_1} \hat{L} E_z + \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} \left[ (\varepsilon_1 - N_l^2)^2 - \varepsilon_2^2 \right] E_z = 0. \quad (28)$$

При виведенні рівняння (10) використовується припущення однорідної плазми (компоненти тензора діелектричної проникливості не залежать від радіуса). Але можна отримати інше рівняння для неоднорідної плазми (компоненти тензора діелектричної проникливості залежать від радіуса), додатне до його розв'язання із застосуванням методу скінчених різниць. Проте, як зазначалося раніше, перехід до скінчених різниць призводить до громіздких виразів, що ускладнює подальший аналіз. Тому, при аналітичному розв'язанні задачі з плазмовим циліндром та приосьювою циліндричною порожниною доцільно обмежитися лише випадком однорідної плазми.

Для випадку однорідної плазми розв'яжемо рівняння (10), яке може бути записане в еквівалентній формі (29) у такому вигляді:

$$\begin{aligned} (\hat{L} + N^{+2})(\hat{L} + N^{-2}) E_z &= 0 \\ (N^\pm)^2 &= -\frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \beta} \\ \alpha &= \frac{\varepsilon_2^2 + (N_l^2 - \varepsilon_1)(\varepsilon_1 + \varepsilon_3)}{\varepsilon_1} \\ \beta &= \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} \left[ (\varepsilon_1 - N_l^2)^2 - \varepsilon_2^2 \right]. \end{aligned} \quad (29)$$

Загальний розв'язок рівняння (29) та еквівалентного йому рівняння (10) має вигляд

$$E_z = A_+ J_m(N^+ r) + A_- J_m(N^- r) +$$

$$+ B_+ Y_m(N^+ r) + B_- Y_m(N^- r), \quad (30)$$

де  $J_m$  та  $Y_m$  – функції Бесселя  $m$ -го порядку.

Для плазмової частини системи – компонентів з індексом 2 – одержуємо вираз (31):

$$\begin{aligned} E_{2z} &= A_+ A_{PEZ}(r) + A_- A_{MEZ}(r) + \\ &+ B_+ B_{PEZ}(r) + B_- B_{MEZ}(r). \end{aligned} \quad (31)$$

У (31) введені позначення:

$$\begin{aligned} A_{PEZ}(r) &= J_m(N^+ r) \\ A_{MEZ}(r) &= J_m(N^- r) \\ B_{PEZ}(r) &= Y_m(N^+ r) \\ B_{MEZ}(r) &= Y_m(N^- r). \end{aligned}$$

Із системи рівнянь (5) можна отримати такий вираз для поздовжньої компоненти магнітного поля через поздовжню компоненту електричного поля:

$$B_z = (\hat{L} E_z) K - \Sigma \varepsilon_3 E_z, \quad (32)$$

де

$$\begin{aligned} K &= \frac{\varepsilon_2 N_l}{V} - \frac{\Sigma}{V} [V - N_l^2 (\varepsilon_1 - N_l^2)] \\ \Sigma &= \frac{N_l^2 - \varepsilon_1}{N_l \varepsilon_2} \\ V &= (N_l^2 - \varepsilon_1)^2 - \varepsilon_2^2. \end{aligned}$$

Використовуючи (31), можна записати вираз (32) для  $B_z$  у вигляді

$$B_z = A_+ A_{PBZ}(r) + A_- A_{MBZ}(r) + B_+ B_{PBZ}(r) + B_- B_{MBZ}(r)$$

$$A_{PBZ}(r) = -(KN^{+2} + \Sigma \varepsilon_3) J_m(N^+ r)$$

$$A_{MBZ}(r) = -(KN^{-2} + \Sigma \varepsilon_3) J_m(N^- r)$$

$$B_{PBZ}(r) = -(KN^{+2} + \Sigma\varepsilon_3)Y_m(N^+r) \quad \text{поля, використовуючи (5), отримаємо}$$

$$B_{MBZ}(r) = -(KN^{-2} + \Sigma\varepsilon_3)Y_m(N^-r). \quad (33) \quad E_r = \varepsilon_2 N_l \frac{m}{r} V^{-1} E_z + \dots \quad (34)$$

Для радіальної компоненти електричного поля Тоді (31) і (33) дають такий вираз для  $E_r$ :

$$E_r = A_+ A_{PER}(r) + A_- A_{MER}(r) + B_+ B_{PER}(r) + B_- B_{MER}(r),$$

$$A_{PER}(r) = -\frac{N_l \varepsilon_2}{V} \left\{ \frac{KN^{+2} + \Sigma\varepsilon_3}{N_l} \left[ G_l \frac{m}{r} J_m(N^+r) + N^+ J_m(N^+r) \right] - \frac{m}{r} J_m(N^+r) - G_l N^+ J_m(N^+r) \right\}. \quad (35)$$

Крапка над функцією Бесселя означає похідну по аргументу,  $A_{MER}(r)$  отримується з  $A_{PER}(r)$  заміною  $N^+$  на  $N^-$ ,  $B_{PER}(r)$  отримується з  $A_{PER}(r)$  заміною  $J_m$  на  $Y_m$ ,  $B_{MER}(r)$  отримується з  $A_{PER}(r)$  заміною  $N^+$  на  $N^-$  та заміною  $J_m$  на  $Y_m$ , і введено позначення

$$G_l = \frac{\varepsilon_1 - N_l^2}{\varepsilon_2}.$$

де

$$A_{PET}(r) = -\frac{N_l \varepsilon_2}{V} \left\{ \frac{KN^{+2} + \Sigma\varepsilon_3}{N_l} \left[ \frac{m}{r} J_m(N^+r) + G_l N^+ J_m(N^+r) \right] - G_l \frac{m}{r} J_m(N^+r) - N^+ J_m(N^+r) \right\}.$$

$A_{MET}(r)$  отримується з  $A_{PET}(r)$  заміною  $N^+$  на  $N^-$ ,  $B_{PET}(r)$  отримується з  $A_{PET}(r)$  заміною  $J_m$  на  $Y_m$ , а  $B_{MET}(r)$  отримується з  $A_{PET}(r)$  заміною  $N^+$  на  $N^-$  та заміною  $J_m$  на  $Y_m$ .

Для радіальної та азимутальної компонент магнітного поля маємо такі вирази через компоненти електричного поля:

де

$$A_{PBR}(r) = \frac{N_l}{V} (KN^{+2} + \Sigma\varepsilon_3) \left[ \varepsilon_2 \frac{m}{r} J_m(N^+r) + (\varepsilon_1 - N_l^2) N^+ J_m(N^+r) \right] +$$

$$+ \frac{m}{r} \left[ 1 - \frac{(\varepsilon_1 - N_l^2) N_l^2}{V} \right] J_m(N^+r) - \frac{\varepsilon_2 N_l^2}{V} N^+ J_m(N^+r).$$

$A_{MBR}(r)$  отримується з  $A_{PBR}(r)$  заміною  $N^+$  на  $N^-$ ,  $B_{PBR}(r)$  отримується з  $A_{PBR}(r)$  заміною  $J_m$  на  $Y_m$ , а  $B_{MBR}(r)$  отримується з  $A_{PBR}(r)$  заміною  $N^+$  на  $N^-$  та заміною  $J_m$  на  $Y_m$ .

де

$$A_{PBT}(r) = \left[ 1 - \frac{(\varepsilon_1 - N_l^2) N_l^2}{V} \right] N^+ J_m(N^+r) + \frac{\varepsilon_2 N_l^2}{V} \frac{m}{r} J_m(N^+r) +$$

$$+ \frac{N_l}{V} (KN^{+2} + \Sigma\varepsilon_3) \left[ (\varepsilon_1 - N_l^2) \frac{m}{r} J_m(N^+r) + \varepsilon_2 N^+ J_m(N^+r) \right].$$

Вираз для азимутальної компоненти електричного поля через поздовжні компоненти електричного та магнітного полів має вигляд

$$E_\theta = \varepsilon_2 \frac{m}{r} V^{-1} B_z + \dots, \quad (36)$$

який можна переписати у такій формі:

$$E_\theta = A_+ A_{PET}(r) + A_- A_{MET}(r) + B_+ B_{PET}(r) + B_- B_{MET}(r), \quad (37)$$

$$B_r = \frac{m}{r} E_z - N_l E_\theta$$

$$B_\theta = -N_l E_r + \partial_r E_z. \quad (38)$$

Використовуючи (31) і (37), отримаємо

$$B_r = A_+ A_{PBR}(r) + A_- A_{MBR}(r) +$$

$$+ B_+ B_{PBR}(r) + B_- B_{MBR}(r), \quad (39)$$

Аналогічно для азимутальної компоненти з (31), (35) і (38) отримаємо

$$B_\theta = A_+ A_{PBT}(r) + A_- A_{MBT}(r) +$$

$$+ B_+ B_{PBT}(r) + B_- B_{MBT}(r), \quad (40)$$

$A_{MBT}(r)$  отримується з  $A_{PBT}(r)$  заміною  $N^+$  на  $N^-$ ,  $B_{PBT}(r)$  отримується з  $A_{PBT}(r)$  заміною  $J_m$  на  $Y_m$ , а  $B_{MBT}(r)$  отримується з  $A_{PBT}(r)$  заміною  $N^+$  на  $N^-$  та заміною  $J_m$  на  $Y_m$ .

Запишемо систему диференціальних рівнянь (41) на комплексні амплітуди полів у вакуумі, яку можна отримати із системи диференціальних рівнянь (5) підстановкою  $\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = 0$  та  $\varepsilon_3 = 1$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{m}{r} E_z - N_l E_\theta = B_r \\ -N_l E_r + \frac{\partial E_z}{\partial r} = B_\theta \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_\theta) - \frac{m}{r} E_r = B_z \\ \frac{m}{r} B_z + N_l B_\theta = -E_r \\ N_l B_r + \frac{\partial B_z}{\partial r} = -E_\theta \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_\theta) - \frac{m}{r} B_r = -E_z \end{array} \right. , \quad (41)$$

де опущені індекси  $l$  та  $m$ . Розв'язок системи (41) має вигляд

$$\begin{aligned} E_{1z} &= C_1 C_{1EZ}(r), C_{1EZ}(r) = I_m(Nr) \\ E_{3z} &= D_1 D_{1EZ}(r), D_{1EZ}(r) = K_m(Nr) \\ B_{1z} &= C_2 C_{2BZ}(r), C_{2BZ}(r) = I_m(Nr) \\ B_{3z} &= D_2 D_{2BZ}(r), D_{2BZ}(r) = K_m(Nr) \\ E_{1r} &= C_2 C_{2ER}(r) + C_1 C_{1ER}(r), \\ C_{2ER}(r) &= \frac{m}{r} \frac{1}{N_l^2 - 1} I_m(Nr), \\ C_{1ER}(r) &= \frac{N_l}{N_l^2 - 1} N I_m(Nr) \\ E_{3r} &= D_2 D_{2ER}(r) + D_1 D_{1ER}(r), \\ D_{2ER}(r) &= \frac{m}{r} \frac{1}{N_l^2 - 1} K_m(Nr), \\ D_{1ER}(r) &= \frac{N_l}{N_l^2 - 1} N K_m(Nr) \\ E_{1\theta} &= C_1 C_{1ET}(r) + C_2 C_{2ET}(r), \end{aligned}$$

$$C_{1ET}(r) = \frac{m}{r} \frac{N_l}{N_l^2 - 1} I_m(Nr),$$

$$C_{2ET}(r) = \frac{1}{N_l^2 - 1} N I_m(Nr)$$

$$E_{3\theta} = D_1 D_{1ET}(r) + D_2 D_{2ET}(r),$$

$$D_{1ET}(r) = \frac{m}{r} \frac{N_l}{N_l^2 - 1} K_m(Nr),$$

$$D_{2ET}(r) = \frac{1}{N_l^2 - 1} N K_m(Nr)$$

$$B_{1r} = C_1 C_{1BR}(r) + C_2 C_{2BR}(r),$$

$$C_{1BR}(r) = -\frac{m}{r} \frac{1}{N_l^2 - 1} I_m(Nr),$$

$$C_{2BR}(r) = -\frac{N_l}{N_l^2 - 1} N I_m(Nr)$$

$$B_{3r} = D_1 D_{1BR}(r) + D_2 D_{2BR}(r),$$

$$D_{1BR}(r) = -\frac{m}{r} \frac{1}{N_l^2 - 1} K_m(Nr),$$

$$D_{2BR}(r) = -\frac{N_l}{N_l^2 - 1} N K_m(Nr)$$

$$B_{1\theta} = C_2 C_{2BT}(r) + C_1 C_{1BT}(r),$$

$$C_{2BT}(r) = -\frac{m}{r} \frac{N_l}{N_l^2 - 1} I_m(Nr),$$

$$C_{1BT}(r) = -\frac{1}{N_l^2 - 1} N I_m(Nr)$$

$$B_{3\theta} = D_2 D_{2BT}(r) + D_1 D_{1BT}(r),$$

$$D_{2BT}(r) = -\frac{m}{r} \frac{N_l}{N_l^2 - 1} K_m(Nr),$$

$$D_{1BT}(r) = -\frac{1}{N_l^2 - 1} N K_m(Nr), \quad (42)$$

де  $I_m, K_m$  – модифіковані функції Бесселя,  $N = \sqrt{1 - N_l^2}$ . Для вакууму всередині функція не сингулярна в нулі, вакуум всередині – індекс 1. Для вакууму зовні функція спадаюча на нескінченності, вакуум зовні – відповідно індекс 3. Тоді умови зшивки (3) дають таку систему лінійних рівнянь на  $A_+, A_-, B_+, B_-, C_1, C_2, D_1, D_2$ :

$$\begin{aligned}
 C_1 C_{1ET} \left( \frac{\omega}{c} r_1 \right) + C_2 C_{2ET} \left( \frac{\omega}{c} r_1 \right) &= A_+ A_{PET} \left( \frac{\omega}{c} r_1 \right) + A_- A_{MET} \left( \frac{\omega}{c} r_1 \right) + B_+ B_{PET} \left( \frac{\omega}{c} r_1 \right) + B_- B_{MET} \left( \frac{\omega}{c} r_1 \right) \\
 C_1 C_{1EZ} \left( \frac{\omega}{c} r_1 \right) &= A_+ A_{PEZ} \left( \frac{\omega}{c} r_1 \right) + A_- A_{MEZ} \left( \frac{\omega}{c} r_1 \right) + B_+ B_{PEZ} \left( \frac{\omega}{c} r_1 \right) + B_- B_{MEZ} \left( \frac{\omega}{c} r_1 \right) \\
 C_2 C_{2BT} \left( \frac{\omega}{c} r_1 \right) + C_1 C_{1BT} \left( \frac{\omega}{c} r_1 \right) &= A_+ A_{PBT} \left( \frac{\omega}{c} r_1 \right) + A_- A_{MBT} \left( \frac{\omega}{c} r_1 \right) + B_+ B_{PBT} \left( \frac{\omega}{c} r_1 \right) + B_- B_{MBT} \left( \frac{\omega}{c} r_1 \right) \\
 A_+ A_{PBZ} \left( \frac{\omega}{c} r_1 \right) + A_- A_{MBZ} \left( \frac{\omega}{c} r_1 \right) + B_+ B_{PBZ} \left( \frac{\omega}{c} r_1 \right) + B_- B_{MBZ} \left( \frac{\omega}{c} r_1 \right) &= -\frac{4\pi i}{c} + C_2 C_{2BZ} \left( \frac{\omega}{c} r_1 \right) \\
 D_1 D_{1ET} \left( \frac{\omega}{c} r_2 \right) + D_2 D_{2ET} \left( \frac{\omega}{c} r_2 \right) &= A_+ A_{PET} \left( \frac{\omega}{c} r_2 \right) + A_- A_{MET} \left( \frac{\omega}{c} r_2 \right) + B_+ B_{PET} \left( \frac{\omega}{c} r_2 \right) + B_- B_{MET} \left( \frac{\omega}{c} r_2 \right) \\
 D_1 D_{1EZ} \left( \frac{\omega}{c} r_2 \right) &= A_+ A_{PEZ} \left( \frac{\omega}{c} r_2 \right) + A_- A_{MEZ} \left( \frac{\omega}{c} r_2 \right) + B_+ B_{PEZ} \left( \frac{\omega}{c} r_2 \right) + B_- B_{MEZ} \left( \frac{\omega}{c} r_2 \right) \\
 D_2 D_{2BT} \left( \frac{\omega}{c} r_2 \right) + D_1 D_{1BT} \left( \frac{\omega}{c} r_2 \right) &= A_+ A_{PBT} \left( \frac{\omega}{c} r_2 \right) + A_- A_{MBT} \left( \frac{\omega}{c} r_2 \right) + B_+ B_{PBT} \left( \frac{\omega}{c} r_2 \right) + B_- B_{MBT} \left( \frac{\omega}{c} r_2 \right) \\
 D_2 D_{2BZ} \left( \frac{\omega}{c} r_2 \right) &= A_+ A_{PBZ} \left( \frac{\omega}{c} r_2 \right) + A_- A_{MBZ} \left( \frac{\omega}{c} r_2 \right) + B_+ B_{PBZ} \left( \frac{\omega}{c} r_2 \right) + B_- B_{MBZ} \left( \frac{\omega}{c} r_2 \right). \tag{43}
 \end{aligned}$$

### 3. Висновки

У роботі аналітично розв'язано задачу щодо структури електромагнітних полів у плазмовому циліндрі з однорідної плазми, який містить приосьову циліндричну порожнину. Трубочатий розряд (плазмовий циліндр з приосьовою циліндричною порожниною) обмежено з обох боків провідними стінками. Плазмовий циліндр збуджується індукційною антеною з ВЧ-струмом, яка розташована всередині порожнини. Трубочатий розряд занурено у зовнішнє постійне повздовжнє магнітне поле. Для розв'язання задачі застосовувався

метод комплексних амплітуд – підстановка виразів для полів для переходу до комплексних амплітуд у рівняння Максвелла у циліндричній системі координат. Її розв'язком є залежності комплексних амплітуд полів від радіуса. Ці залежності аналітично отримано як для плазмової, так і для вакуумних частин системи; вони подані у формулах (31), (33), (35), (37), (39), (40) та (42), що становить основний результат даної роботи. Розв'язки узгоджено за допомогою системи лінійних рівнянь (43), отриманої з умов зшивки (3) для комплексних амплітуд полів.

### СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ / REFERENCES

1. R.W. Boswell, F.F. Chen. Helicons – the early years. *IEEE Trans. Plasma Sci.* 25 (1997) 1229.
2. M.A. Lieberman, A.J. Lichtenberg. *Principles of Plasma Discharges and Materials Processing*. 2nd ed. (New York: Wiley, 2005) 757 p.
3. P. Chabert, N. Braithwaite. *Physics of Radio-Frequency Plasmas* (Cambridge: Cambridge University Press, 2011) 405 p.
4. V.F. Virko et al. Helicon discharge excited by a planar antenna in bounded volume. *Probl. At. Sci. Technol.* 6(20) (2014) 130.
5. V.F. Virko, Yu.V. Virko. Influence of nonuniform magnetic field on the helicon discharge excited by various antennas. *Ukr. J. Phys.* 64(3) (2019) 223.
6. V.F. Virko, Yu.V. Virko. Influence of boundary conditions on the plasma potential in a helicon discharge with planar antenna. *Probl. At. Sci. Technol.* 6(154) (2024) 67.
7. Y. Zhang, C. Charles, R. Boswell. Characterization of an annular helicon plasma source powered by an outer or inner RF antenna. *Plasma Sources Sci. Technol.* 25 (2016) 015007.
8. Я.Б. Файнберг, М.Ф. Горбатенко. Электромагнитные волны в плазме, находящейся в магнитном поле. *ЖТФ* 29 (1959) 549. / Ya.B. Fainberg, M.F. Gorbatenko. Electromagnetic waves in a plasma in a magnetic field. *Sov. Phys. Tech. Phys.* 4 (1959) 487. (Rus)
9. F.F. Chen. Helicon discharges and sources: A review. *Plasma Sources Sci. Technol.* 24(1) (2015) 014001.
10. D. Arnush. The role of the Trivelpiece-Gould waves in antenna coupling to helicon waves. *Phys. Plasmas* 7 (2000) 3042.

**M. A. Beloshenko\****Institute for Nuclear Research, National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, Ukraine*\*Corresponding author: [Beloshenko@gmail.com](mailto:Beloshenko@gmail.com)**HIGH-FREQUENCY FIELDS IN A MAGNETIZED PLASMA CYLINDER  
WITH A PERIAXIAL CAVITY EXCITED BY AN AZIMUTHAL RF CURRENT**

The problem of electromagnetic wave propagation in a plasma cylinder with a cylindrical cavity along the axis is considered. In the axial direction, the tubular discharge under consideration is limited by conductive walls. The problem is reduced to a system of six differential equations for complex field amplitudes and, with the remainder, to a fourth-order differential equation with the Bessel operator and the square of this operator for the longitudinal complex amplitude of the electric field in the plasma. This equation (by derivation) assumes a homogeneous plasma (the components of the permittivity tensor do not depend on the radius). But there is another (more general) equation for inhomogeneous plasma that is suitable for its solution by the finite difference method. However, the transition to finite differences gives very cumbersome expressions, which force us to limit ourselves to an analytical solution of the problem with a tubular discharge only in the case of a homogeneous plasma.

*Keywords:* dielectric permittivity tensor, structure of wave fields, helicon waves, plasma cylinder with a periaxial cavity.

Надійшла / Received 23.12.2024