

Ю. А. Бережній¹, В. О. Золотарьов^{2,*}, В. П. Михайлюк³¹ Харківський національний університет ім. В. Н. Каразіна, Харків, Україна² Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б. І. Веркіна НАН України, Харків, Україна³ Інститут ядерних досліджень НАН України, Київ, Україна*Відповідальний автор: zolotarev@ilt.kharkov.ua

ВЗАЄМОДІЯ ПРОТОНІВ З ЯДРАМИ В БОРНОВОМУ НАБЛИЖЕННІ (II)

На основі Борнового наближення представлено порівняння раніше запропонованого підходу, в якому аналітичні вирази для амплітуд розсіяння ядрами було отримано з використанням розкладу потенціалу взаємодії за малими доданками, а також підходу, в якому розклад потенціалу взаємодії за малими доданками не виконувався. При отриманні аналітичних виразів для амплітуд пружного розсіяння протонів ядрами використовувалося друге Борнове наближення з потенціалом у формі Вудса - Саксона, а також з потенціалом взаємодії для ядра з різкою границею поглинання, що коригувався для врахування розмиття ядерної поверхні. Виконано порівняння даних теоретичних розрахунків з наявними експериментальними даними для диференціальних перерізів та поляризаційних характеристик розсіяння протонів ядрами ^{40}Ca при енергії 200 MeV.

Ключові слова: Борнове наближення, поляризаційні спостережувані.

1. Вступ

Взаємодія частинок та легких ядер з ядрами інтенсивно вивчається протягом багатьох років. При теоретичній інтерпретації таких процесів використовуються різноманітні моделі та підходи, що можуть доповнювати один одного.

Нині накопичено значний експериментальний матеріал щодо взаємодії частинок з ядрами в області середніх енергій. Теоретичні дослідження подібних реакцій свідчать про необхідність синтезу підходів, що використовуються при вивченні ядерних реакцій та структури ядер.

Одним із таких підходів є оптична модель (див., наприклад, [1 - 3] і посилання там же). Оптична модель розсіяння адронів і слабкозв'язаних частинок ядрами з використанням комплексного оптичного потенціалу є важливою фундаментальною проблемою ядерної фізики. Така модель описує рух однієї частинки в середньому полі, яке створюється нуклонами, що входять до складу ядра. Середнє поле, у якому рухається налітаюча частинка, зазвичай описується простим феноменологічним одночастинковим потенціалом. Таке наближення дає змогу перейти від задачі багатьох тіл до задачі одного тіла в полі комплексного потенціалу, суттєво спрощує розрахунки перерізів взаємодії та знаходить підтвердження як в узгодженні теоретично розрахованих спостережуваних характеристик розсіяння з існуючими експериментальними даними, так і в низці багатьох інших важливих фундаментальних фізичних проблем.

Оптичний потенціал є ефективним інструментом, який використовується не тільки для пруж-

ного розсіяння, але і як інгредієнт для прогнозування перерізів та кутових розподілів багатьох процесів прямих ядерних реакцій, і тому він відіграє важливу роль у ядерній фізиці.

Для розуміння поведінки різноманітних характеристик розсіяння можна також використати Борнове наближення (БН), яке являлось основою для побудови оптичної моделі [1]. У такому підході амплітуда розсіяння частинок ядрами може бути представлена у вигляді нескінченного ряду по ступенях збурення. Однак, на практиці через складність обчислень лише перший доданок БН (перший член Борнового ряду) зазвичай використовується. Істотним недоліком такого наближення є дійсна величина амплітуди розсіяння для Ермітового потенціалу, що несумісне з оптичною теоремою. Іншими словами, у цьому випадку область, у якій дійсний Ермітовий потенціал суттєво відрізняється від нуля, діє як джерело частинок. Разом із тим, у першому БН поляризація частинок для комплексного потенціалу знакопостійна, що суперечить існуючим експериментальним даним, а для Ермітового потенціалу поляризація частинок зі спином $1/2$ при їхньому розсіянні мішенню з нульовим спіном, дорівнює нулю [4]. Тому для прийнятного вирішення даної задачі розсіяння необхідно використовувати принаймні другий доданок БН (другий член Борнового ряду) [4, 5].

У даній роботі на основі другого БН виконано порівняння розроблених раніше підходів, в яких аналітичні вирази для амплітуд розсіяння ядрами було отримано з використанням розкладу потен-

ціалу взаємодії за малими доданками, а також у підході, в якому розклад потенціалу взаємодії за малими доданками не виконувався.

У розділі 2 представлено використаний теоретичний підхід, а в розділі 3 – порівняння теоретичних розрахунків з наявними експериментальними даними для диференціальних перерізів та поляризаційних характеристик розсіяння протонів ядрами ^{40}Ca при енергії 200 MeV.

2. Теоретичний підхід

У БН у загальному випадку амплітуда розсіяння частинок ядрами може бути представлена у вигляді ряду по ступенях збурення

$$\hat{F}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}'), \quad (2.1)$$

$$f^{(n)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int \prod_{j=1}^n d\mathbf{r}_j \exp(-i\mathbf{k}'\mathbf{r}_n) U(\mathbf{r}_n) G_0^{(+)}(|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_{n-1}|) U(\mathbf{r}_{n-1}) \dots G_0^{(+)}(|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|) U(\mathbf{r}_1) \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}_1), \quad (2.2)$$

де n – порядок збурення.

Потенціал взаємодії налітаючої частинки з урахуванням спин-орбітової взаємодії представимо у вигляді

$$U(\mathbf{r}) = U_c(r) + U_s(r) \boldsymbol{\sigma} \mathbf{l}, \quad (2.3)$$

де $U_c(r)$ і $U_s(r)$ – центральна і спин-орбітова частини оптичного потенціалу, $\boldsymbol{\sigma} \mathbf{l}$ – скалярний добуток оператора спіна і орбітового моменту налітаючої частинки, $\mathbf{l} = -i\mathbf{n} \frac{d}{d\theta}$, а $\mathbf{n}$ – вектор нормалі до площини реакції.

Радіальна залежність оптичного потенціалу $U(r)$ (2.3) може бути представлена у формі

$$U_c(r) = -V_0 \left\{ g_v(r) + i\zeta g_w(r) - 4id_w \zeta_{0s} \frac{dg_w(r)}{dr} \right\}, \quad (2.4)$$

$$U_s(r) = \lambda_\pi^2 \frac{V_s(1+i\zeta_s)}{r} \left\{ \frac{dg_s(r)}{dr} + \gamma d_s \frac{d^2 g_s(r)}{dr^2} \right\}, \quad (2.5)$$

де $\zeta = \frac{W_0}{V_0}$, $\zeta_s = \frac{W_s}{V_s}$, $\zeta_{0s} = \frac{W_{0s}}{V_0}$ відповідно,

$\lambda_\pi^2 = (\hbar / m_\pi c)^2 = 2 \text{ фм}^2$ – комптонівська довжина хвилі піона, що зазвичай використовується у таких розрахунках, а γ – безрозмірний параметр, що підганяється. Зазначимо, що обґрунтованість врахування другого доданка в (2.5) обговорювалася в роботах [6, 7], а виконані в [4, 5] розрахунки вказують на те, що врахування цього доданка суттєво впливає на поведінку поляризаційних характеристик розсіяння.

Амплітуда розсіяння (2.1) нуклона ядром з нульовим спіном є спіновим оператором з такою загальною структурою

$$\hat{F}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = F_c(k, k') + F_s(k, k') (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}), \quad (2.6)$$

де $F_{c,s}(k, k')$ – центральна та спин-орбітова

частини амплітуди (2.6), $\boldsymbol{\sigma}$ – оператор спіна налітаючого нуклона, $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{k}'}{|\mathbf{k} \times \mathbf{k}'|}$. У даній

формулі амплітуди $F_{c,s}(k, k')$ визначаються як сума центральної $f_c^{(n)}(k, k')$ та спин-орбітової $f_s^{(n)}(k, k')$ частин амплітуди (2.2).

Залишаючи в (2.2) тільки два перші доданки в БН для амплітуд $f^{(1,2)}(k, k')$ отримуємо

$$f^{(1)}(q) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d\mathbf{r} e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{r}} U(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad (2.7)$$

$$f^{(2)}(q) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{r}} U(\mathbf{r}') G_0^{(+)}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) U(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad (2.8)$$

де $m = m_p m_t / (m_p + m_t)$ – зведена маса, $\mathbf{k}$ і $\mathbf{k}'$ – хвильові вектори налітаючого та розсіяного нуклона, переданий імпульс $\mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{k}'$ ($|\mathbf{q}| = 2k \sin(\theta/2)$), а функція Гріна визначається таким виразом

$$G_0^{(+)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \quad (2.9)$$

Радіальну залежність центральної $U_c(r)$ та спин-орбітової $U_s(r)$ частин оптичного потенціалу $U(\mathbf{r})$ (2.3) можна представити у формі Вудса - Саксона з урахуванням відмінностей між параметрами для дійсної, уявної і спин-орбітової частин

$$g_j(r) = \frac{1}{1 + e^{(r-R_j)/d_j}}, \quad j = v, w, s. \quad (2.10)$$

У такому підході при виконанні інтегрування у формулі (2.8) у роботах [4, 5] використовувалося наближення $d/R \ll 1$ та розклад потенціалу

$U(r')$ до перших важливих доданків

$$U(|\mathbf{u} + \mathbf{r}'|) \approx U(u) + \frac{\mathbf{u}\mathbf{r}'}{u} \frac{dU(u)}{du}, \quad (2.11)$$

де $|\mathbf{u} + \mathbf{r}'| \approx u + \mathbf{u}\mathbf{r}'/u$, $\mathbf{u} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$. Такий розклад потенціалу зумовлено тим, що функція Гріна $G_0^{(+)}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$ в (2.9) має максимум при $|\mathbf{r}| \approx |\mathbf{r}'|$.

Зазначимо, що аналітичні вирази для амплітуд (2.7), (2.8) у такому підході є доволі об'ємними, представлені в роботах [4, 5] і тому ми їх тут не наводимо.

Розглянемо ядро з різкою границею поглинання. У цьому випадку радіальна залежність оптичного потенціалу $U(\mathbf{r})$ (2.3) з урахуванням відмінностей між параметрами для дійсної, уявної і спин-орбітової частин обирається у вигляді

$$g_j(r) = \begin{cases} 1, & r \leq R_j \\ 0, & r > R_j \end{cases}, \quad \frac{dg_j(r)}{dr} = -\delta(r - R_j). \quad (2.12)$$

Детальний опис одержання аналітичних виразів для амплітуд (2.7) і (2.8) у такому підході представлено в роботі [8]. Зважаючи на те, що в даній роботі аналітичні вирази для амплітуд розсіяння, отримані у [8], застосовуються виключно з метою чисельного обчислення поляризаційних характеристик розсіяння та їх зіставлення з експериментальними даними, у цьому розділі наведено лише підсумкові результати відповідних теоретичних розрахунків із [8].

Для амплітуди $\hat{F}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ (2.6) з урахуванням відмінностей у радіальній залежності центральної і спин-орбітової частин потенціалу $g_{j\{v,w\}}(r)$ і $g_s(r)$ отримуємо [8]

$$\hat{F}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \{f_c^{(1)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') + f_c^{(2)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')\} + \{f_s^{(1)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') + f_s^{(2)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')\}(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}), \quad (2.13)$$

$$f_c^{(1)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \frac{2mV_0}{\hbar^2} \left\{ F_{d_v}(q) R_v^3 \frac{j_1(qR_v)}{qR_v} + i\zeta F_{d_w}(q) R_w^3 \frac{j_1(qR_w)}{qR_w} - 4id_w\zeta_{0s} F_{d_w}(q) R_w^2 j_0(qR_w) \right\}, \quad (2.14)$$

$$f_s^{(1)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = i\lambda_\pi^2 F_{d_s}(q) \frac{2mR_s^3 V_s}{\hbar^2} (1 + i\zeta_s) k^2 \sin \theta \frac{j_1(qR_s)}{qR_s}, \quad (2.15)$$

$$f_c^{(2)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \frac{i}{k} \left(\frac{2mV_0}{\hbar^2 q} \right)^2 \left\{ F_{d_v}(q) R_v^2 I_v + \frac{i}{2} \zeta F_{d_{vw}}(q) R_{vw}^2 I_{vw} - \zeta^2 F_{d_w}(q) R_w^2 I_w \right\}, \quad (2.16)$$

$$I_j = \left[J_2(qR_j) - \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{dtt}{1-t^2} J_2(qR_j t) \right], \quad j = v, vw, w, s; \quad R_{vw} = \frac{1}{2}(R_v + R_w), \quad d_{vw} = \sqrt{d_v d_w}, \quad (2.17)$$

$$f_s^{(2)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = -4iF_{d_s}(q) R_s \lambda_\pi^2 \frac{m^2}{q\hbar^4} k \sin \theta V_0 V_s (1 + i\zeta_s) (F_{d_v}(q) R_v^2 j_1(qR_v) + i\zeta F_{d_w}(q) R_w^2 j_1(qR_w)), \quad (2.18)$$

де фактор згаснення $F_{d_j}(q)$ використовується для врахування розмиття границі поглинання ядра і визначається формулою [9]

$$F_{d_j}(q) = \frac{\pi q d_j}{\text{sh}(\pi q d_j)}. \quad (2.19)$$

3. Результати розрахунків та обговорення

На основі представленого підходу виконано розрахунки диференціальних перерізів і поляризаційних спостережуваних для пружного розсіяння протонів ядрами ^{40}Ca при енергії $E_p = 200$ МеВ. Результати даних розрахунків представлено на рисунку.

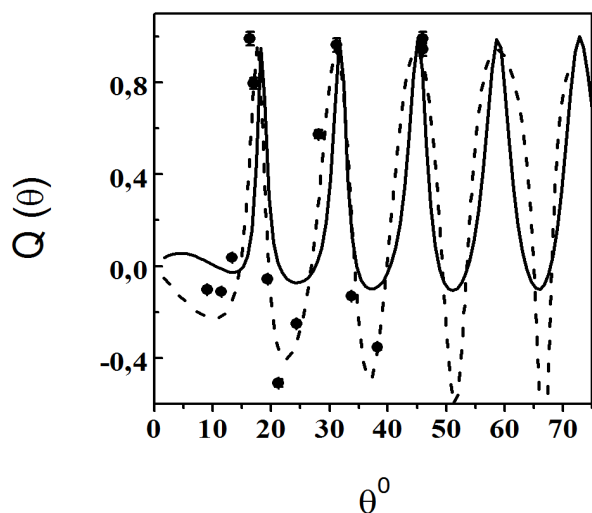
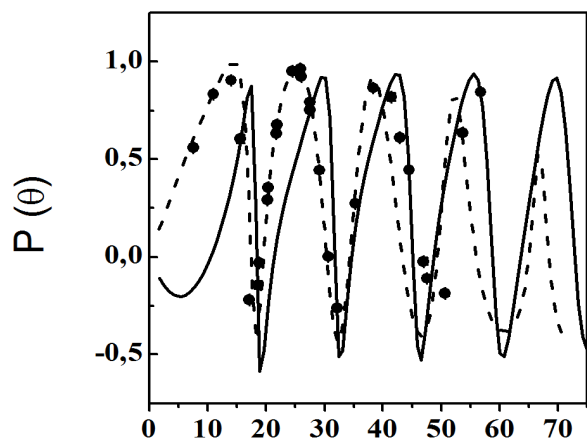
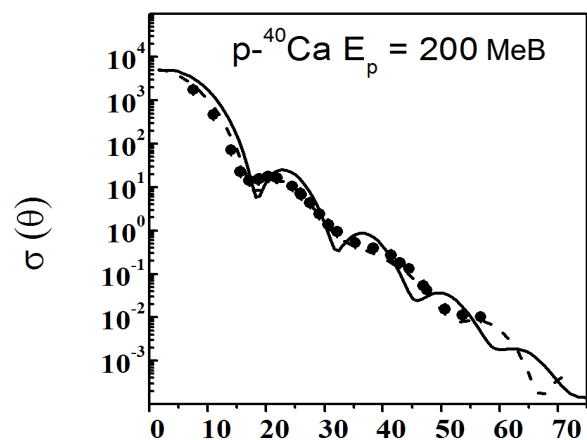
Суцільні криві на рисунку розраховано у підході, в якому розклад потенціалу взаємодії за малими доданками не виконувався (див. формули (2.12) - (2.19)), а пунктирні криві – взяті з робіт [4, 5], тобто у підході, в якому аналітичні вирази для амплітуд розсіяння ядрами було отримано з використанням розкладу потенціалу взаємодії за малими доданками.

З рисунка видно, що в обох використаних підходах результати виконаних розрахунків доволі добре узгоджуються між собою та з наявними експериментальними даними.

Використані при виконанні даних розрахунків набори параметрів оптичного потенціалу отримано з підгонки наявних експериментальних даних із пружного розсіяння протонів ядрами ^{40}Ca при енергії 200 МеВ і представлено в таблиці.

Параметри оптичного потенціалу для $p\text{-}^{40}\text{Ca}$ взаємодії при енергії 200 MeB

V_0 , MeB	W_0 , MeB	W_{0s} , MeB	d_v , фм	R_v , фм	d_w , фм	R_w , фм	V_s , MeB	W_s , MeB	d_s , фм	R_s , фм	γ
10,813	8,351	1,766	0,506	4,789	0,666	3,577	1,885	-1,670	0,715	4,305	0,093
						4,877					0,000



Диференціальні перерізи, поляризації та функції повороту спіна для розсіяння протонів ядрами ^{40}Ca при енергії 200 MeB. Опис кривих дивись у тексті. Експериментальні дані з роботи [10].

Слід зазначити, що в даній роботі в якості базового було використано набір параметрів

оптичного потенціалу з робіт [4, 5]. Зважаючи на добре відому неоднозначність визначення параметрів потенціалу в оптичній моделі, це може бути причиною відмінностей у поведінці розрахованих характеристик розсіяння, що спостерігаються на рисунку.

Крім того, як відзначалося вище, врахування другого доданка в (2.5) суттєво впливає на поведінку поляризаційних характеристик розсіяння. У підході, в якому розклад потенціалу взаємодії за малими доданками не виконувався, цей доданок не враховувався, оскільки в такому підході його врахування не дає змоги отримати аналітичні вирази для амплітуд розсіяння.

4. Висновки

На основі БН представлено порівняння раніше запропонованого [4] підходу, в якому аналітичні вирази для амплітуд розсіяння ядрами було отримано з використанням розкладу потенціалу взаємодії за малими доданками, а також підходу, в якому розклад потенціалу взаємодії за малими доданками не виконувався [8].

При отриманні аналітичних виразів для амплітуд пружного розсіяння протонів ядрами використовувалося друге БН з потенціалом у формі Вудса - Саксона, а також з потенціалом взаємодії для ядра з різкою границею поглинання, який коригувався для врахування розмиття ядерної поверхні.

Використання другого БН зумовлено тим, що у першому БН амплітуда розсіяння для Ермітового потенціалу є дійсною величиною, що несумісне з оптичною теоремою. Іншими словами, у цьому випадку область, у якій дійсний Ермітовий потенціал суттєво відрізняється від нуля, діє як джерело частинок. До того ж, у першому БН поляризація частинок для комплексного потенціалу знакопостійна, що суперечить існуючим експериментальним даним, а для Ермітового потенціалу поляризація частинок зі спином 1/2 при їхньому розсіянні мішенню з нульовим спіном, дорівнює нулю [4]. Дані недоліки у другому БН усуваються.

У даній роботі виконано порівняння представлених теоретичних розрахунків з наявними експериментальними даними для диференціальних перерізів та поляризаційних характеристик розсіяння протонів ядрами ^{40}Ca при енергії 200 MeB.

Показано, що в обох використаних підходах результати виконаних розрахунків доволі добре узгоджуються між собою та з наявними експериментальними даними.

Наостанок зазначимо, що обидва використані у даній роботі підходи рівноцінні. Іншими словами, обидва ці підходи дають змогу отримати аналітичні вирази для амплітуд та характеристик пружного розсіювання частинок ядрами, а також доволі добре описати наявні експериментальні дані.

Виконані в даній роботі розрахунки диференціальних перерізів та поляризаційних характерис-

тик розсіювання протонів ядрами ^{40}Ca при енергії 200 MeV є фактично тестовими, оскільки представлений підхід дає можливість розширити дослідження таких процесів і на більш широкий спектр ядер.

Водночас, для оцінки практичного застосування запропонованих підходів доцільно провести порівняння їх з іншими часто застосовуваними моделями, наприклад, оптичною та дифракційною. Дані дослідження плануються в подальшому.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ / REFERENCES

1. P.E. Hodgson. *Nuclear Reactions and Nuclear Structure*. W. Marshall, D.H. Wilkinson (Eds.) (Oxford, Clarendon Press, 1971) 661 p.
2. P.E. Hodgson. *The Nucleon Optical Model* (World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 1994) 432 p.
3. H. Feshbach. A unified theory of nuclear reactions, II. *Ann. Phys.* 281 (2000) 519.
4. Yu.A. Berezhnoy, V.P. Mikhailyuk. Polarization of protons in the optical model. *Chinese Physics C* 41(2) (2017) 024102.
5. A.V. Babak, Yu.A. Berezhnoy, V.P. Mikhailyuk. Born approximation for polarization observables at the scattering of protons by ^{40}Ca nuclei. *Ukr. J. Phys.* 65(5) (2020) 369.
6. A. Dar, B. Kozlowsky. Polarization in meson-baryon elastic scattering at high energies. *Phys. Lett.* 20 (1966) 314.
7. S. Varma. Polarization in elastic scattering at low energies. *Nucl. Phys. A* 97 (1967) 282.
8. Ю.А. Бережной, В.О. Золотарьев, В.П. Михайлюк. Взаємодія протонів з ядрами в Борновому наближенні (I). *Ядерна фізика та енергетика* 26(2) (2025) 130. / Yu.A. Berezhnoy, V. A. Zolotarev, V. P. Mikhailyuk. Interaction of protons with nuclei in the Born approximation (I). *Nucl. Phys. At. Energy* 26(2) (2025) 130. (Ukr)
9. W.E. Frahn. Wave mechanics of heavy ion collisions. In: *Heavy-Ion, High Spin States and Nuclear Structure*. Vol. 1. Proc. of the Int. Extended Seminar, Trieste, Italy, 17 Sep. - 21 Dec. 1973 (Vienna: International Atomic Energy Agency, 1975) p. 157.
10. H. Seifert et al. Effective interaction for $^{16}\text{O}(p,p')$ and $^{40}\text{Ca}(p,p')$ at $E_p = 200$ MeV. *Phys. Rev. C* 47 (1993) 1615.

Yu. A. Berezhnoy¹, V. A. Zolotarev^{2,*}, V. P. Mikhailyuk³

¹ V. N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, Ukraine

² B. I. Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering, National Academy of Sciences of Ukraine, Kharkiv, Ukraine

³ Institute for Nuclear Research, National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, Ukraine

*Corresponding author: zolotarev@ilt.kharkov.ua

INTERACTION OF PROTONS WITH NUCLEI IN THE BORN APPROXIMATION (II)

In the framework of the Born approximation, comparison of the previously used approaches, in which analytical expressions for the scattering amplitudes of particles by nuclei were obtained using the expansion of the potential into the series up to the first significant terms, as well as an approach in which such expansion was not performed, are presented. When obtaining analytical expressions for the amplitudes for elastic scattering of protons by nuclei, the second Born approximation with a potential in the Woods-Saxon form, as well as with the potential with a sharp absorption boundary, which was corrected to take into account the blurring of the nuclear surface, are used. Performed theoretical calculations are compared with the available experimental data for the differential cross sections and polarization observables for proton scattering by ^{40}Ca nuclei at 200 MeV energy.

Keywords: Born approximation, polarization observables.

Надійшла / Received 20.03.2025