**В. А. Бабенко*, О. В. Нестеров**

*Інститут теоретичної фізики ім. М. М. Боголюбова НАН України, Київ, Україна*

*Відповідальний автор: pet2@ukr.net

# ПРО БІКВАДРАТИЧНИЙ АНГАРМОНІЧНИЙ ОСЦИЛЯТОР – ПІДХІД У РАМКАХ РОЗКЛАДУ ПО ОСЦИЛЯТОРНОМУ БАЗИСУ. II. ДОСЛІДЖЕННЯ ХВИЛЬОВИХ ФУНКЦІЙ І ПРИСКОРЕННЯ ЗБІЖНОСТІ РОЗКЛАДІВ

Для традиційної фізичної моделі квантового біквадратичного ангармонічного осцилятора з гамільтоніаном $H = \frac{1}{2}\left(p^2 + x^2\right) + \lambda x^4$, який відіграє значну роль у квантовій теорії поля, фізиці елементарних частинок та ядерній фізиці, докладно вивчаються і розраховуються його фізичні характеристики та властивості. Запропонований нами для дослідження моделі метод розкладу хвильової функції системи по повному набору власних функцій гармонічного осцилятора дає змогу точно аналізувати та розраховувати всі параметри і властивості відповідних квантових систем. Дана модель також широко застосовується для дослідження молекулярних коливань, фононних мод у твердих тілах, нелінійних оптичних явищ тощо. Нами розраховано та побудовано хвильові функції ангармонічного осцилятора для ряду значень константи зв’язку $\lambda$. Також запропоновано і докладно вивчено покращений модифікований метод розкладу по узагальненому оптимізуючому осциляторному базису з варійованою частотою цього базису, який дає можливість кардинально прискорити збіжність розкладів у всій області зміни константи зв’язку $\lambda$ і таким чином значно підвищити ефективність застосованого методу, даючи змогу проводити розрахунки з використанням дуже малого числа базисних функцій $N \lesssim 10$. Отже, цей модифікований підхід дає змогу досить просто і ефективно практично повністю розв’язати задачу про біквадратичний ангармонічний осцилятор, забезпечуючи можливість відносно легкого розрахунку при будь-яких значеннях константи зв’язку всіх його фізичних характеристик, включаючи енергії основного і збуджених станів, а також хвильові функції цих станів.

*Ключові слова*: ангармонічний осцилятор, осциляторний базис, квантова теорія поля.

**V. A. Babenko*, A. V. Nesterov**

*Bogolyubov Institute for Theoretical Physics, National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, Ukraine*

*Corresponding author: pet2@ukr.net

# THE QUARTIC ANHARMONIC OSCILLATOR – AN OSCILLATOR-BASIS EXPANSION APPROACH. II. STUDY OF THE WAVE FUNCTIONS AND ACCELERATION OF THE EXPANSIONS CONVERGENCE

For the traditional physical model of the quantum quartic anharmonic oscillator with the Hamiltonian $H = \frac{1}{2}\left(p^2 + x^2\right) + \lambda x^4$, which plays a significant role in quantum field theory, elementary particle physics, and nuclear physics, its physical characteristics and properties are comprehensively studied and calculated. The method we propose for studying the model, based on expanding the system’s wave function in a complete set of harmonic oscillator eigenfunctions, facilitates a thorough analysis and evaluation of all parameters and features of the corresponding quantum systems. This model is also widely used for studying molecular vibrations, phonon modes in solids, nonlinear optical phenomena, and more. We have calculated and constructed the wave functions of the anharmonic oscillator for various values of the oscillator coupling constant $\lambda$. Furthermore, an improved and modified expansion method, using a generalized optimizing oscillator basis with variable frequency, has also been proposed and studied in detail. This improved method drastically accelerates the convergence of expansions across the entire range of the coupling constant variation, thereby substantially increasing the efficiency of the applied method by allowing calculations with a very small number of expansion basis functions $N \lesssim 10$. Consequently, this modified approach provides a practically complete, quite simple, and efficient solution to the problem of the quartic anharmonic oscillator, enabling the relatively easy computation of all its physical properties, including the energies of the ground and excited states, as well as the wave functions of these states, for any values of the coupling constant.

*Keywords*: anharmonic oscillator, oscillator basis, quantum field theory.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ / REFERENCES

1. В.А. Бабенко, О.В. Нестеров. Про біквадратичний ангармонічний осцилятор – підхід у рамках розкладу по осциляторному базису. I. Дослідження та розрахунок енергій основного і збуджених станів. Ядерна фізика та енергетика 25(3) (2024) 216. / V.A. Babenko, A.V. Nesterov. The quartic anharmonic oscillator – an oscillator-basis expansion approach. I. Energy levels study and calculation. Nucl. Phys. At. Energy 25(3) (2024) 216. (Ukr)

2. C.M. Bender, T.T. Wu. Anharmonic oscillator. Phys. Rev. 184 (1969) 1231.
3. F.T. Hioe, D. Macmillen, E.W. Montroll. Quantum theory of anharmonic oscillators: Energy levels of a single and a pair of coupled oscillators with quartic coupling. Phys. Rep. 43 (1978) 305.
4. К. Ициксон, Ж.-Б. Зюбер. Квантовая теория поля. Том 2 (Москва: Мир, 1984) 400 с. / C. Itzykson, J.-B. Zuber. Quantum Field Theory (New York: McGraw-Hill, 1980) 705 p.
5. G.A. Arteca, F.M. Fernández, E.A. Castro. Large Order Perturbation Theory and Summation Methods in Quantum Mechanics (Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1990) 644 p.
6. J.C. Le Guillou, J. Zinn-Justin (Eds.). Current Physics-Sources and Comments. Book series. Vol. 7. Large-Order Behaviour of Perturbation Theory (Amsterdam: Elsevier Science Publishers, 1990) 580 p.
7. J. Zinn-Justin. Quantum Field Theory and Critical Phenomena. 4th edn. (Oxford: Clarendon Press, 2002) 1054 p.
8. G. Lévai, J.M. Arias. Search for critical-point nuclei in terms of the sextic oscillator. Phys. Rev. C 81 (2010) 044304.
9. A.A. Raduta, P. Buganu. Application of the sextic oscillator with a centrifugal barrier and the spheroidal equation for some X(5) candidate nuclei. J. Phys. G 40 (2013) 025108.
10. R. Budaca. Quartic oscillator potential in the γ-rigid regime of the collective geometrical model. Eur. Phys. J. A 50 (2014) 87.
11. P. Buganu, R. Budaca. Analytical solution for the Davydov-Chaban Hamiltonian with a sextic potential for $\gamma = 30^{\circ}$. Phys. Rev. C 91 (2015) 014306.
12. M.M. Hammad et al. Critical potentials and fluctuations phenomena with quartic, sextic, and octic anharmonic oscillator potentials. Nucl. Phys. A 1004 (2020) 122036.
13. A.V. Turbiner, J.C. del Valle Rosales. Quantum Anharmonic Oscillator (Singapore: World Scientific, 2023) 286 p.
14. A.S. Davydov, A.A. Chaban. Rotation-vibration interaction in non-axial even nuclei. Nucl. Phys. 20 (1960) 499.
15. А.С. Давыдов. Возбужденные состояния атомных ядер (Москва: Атомиздат, 1967) 262 с. / A.S. Davydov. Excited States of Atomic Nuclei (Moskva: Atomizdat, 1967) 262 p. (Rus)
16. И.Е. Кашуба, Ю.В. Породзинский, Е.Ш. Суховицкий. Применение модели Давыдова-Чабана для описания рассеяния быстрых нейтронов четно-четными ядрами. Ядерная физика 48 (1988) 677. / I.E. Kashuba, Y.V. Porodzinskii, E.S. Sukhovitskii. Use of the Davydov-Chaban model for the description of fast neutrons by even-even nuclei. Sov. J. Nucl. Phys. 48 (1988) 1012.
17. И.Е. Кашуба, О.И. Давидовская. Спиновая зависимость формы четно-четного ядра в модели Давыдова-Чабана. Ядерная физика 65 (2002) 1446. / I.E. Kashuba, O.I. Davidovskaya. Spin dependence of the shape of even-even nuclei within the Davydov-Chaban model. Phys. Atom. Nucl. 65 (2002) 1411.
18. J.P. Davidson. Rotations and vibrations in deformed nuclei. Rev. Mod. Phys. 37 (1965) 105.
19. О. Бор, Б. Моттельсон. Структура атомного ядра. Том 2 (Москва: Мир, 1977) 664 с. / A. Bohr, B.R. Mottelson. Nuclear Structure. Vol. 2 (New York: W. A. Benjamin, 1975) 748 p.
20. М. Абрамовиц, И. Стиган (ред.). Справочник по специальным функциям (Москва: Наука, 1979) 832 с. / M. Abramowitz, I.A. Stegun (Eds.). Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables (Washington, D.C.: National Bureau of Standards, 1964) 1046 p.
21. И.Е. Кашуба, Е.Ш. Суховицкий. Вычисление функций параболического цилиндра в моделях динамической структуры ядра и нуклон-ядерного рассеяния. Препринт. Ин-т ядерных исслед. АН УССР КИЯИ-87-4 (Киев, 1987) 19 с. / I.Ye. Kashuba, Ye.Sh. Sukhovitsky. Calculation of functions of a parabolic cylinder in models of dynamic nuclear structure and nucleon-nuclear scattering. Preprint. Institute for Nuclear Research NAS of UkrSSR KIYI-87-4 (Kyiv, 1987) 19 p. (Rus)
22. А.К. Зайченко, И.Е. Кашуба. Вычисление функции параболического цилиндра в ядерно-физических исследованиях. Препринт. Ин-т ядерных исслед. НАН Украины КИЯИ-01-3 (Киев, 2001) 14 с. / A.K. Zajchenko, I.E. Kashuba. Evaluation of the parabolic cylinder function in the context of nuclear physics. Preprint. Institute for Nuclear Research NAS of Ukraine KIYI-01-3 (Kyiv, 2001) 14 p. (Rus)
23. M. Garai, D.A. Barlow. Taking the road less traveled: Solving the one-dimensional quantum oscillator using the parabolic-cylinder equation. arXiv:2401.07913v1 [quant-ph].
24. А. Найфэ. Введение в методы возмущений (Москва: Мир, 1984) 535 с. / A.H. Nayfeh. Introduction to Perturbation Techniques (New York: Wiley, 1981) 519 p.
25. F. Verhulst. Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems (Berlin: Springer, 1996) 306 p.
26. V.S. Vasilevsky, F. Arickx. Algebraic model for quantum scattering: Reformulation, analysis, and numerical strategies. Phys. Rev. A 55 (1997) 265.
27. V.S. Vasilevsky, M.D. Soloha-Klymchak. T-matrix in discrete oscillator representation. Ukr. J. Phys. 60 (2015) 297.
28. P. Okun, K. Burke. Uncommonly accurate energies for the general quartic oscillator. Int. J. Quantum Chem. 121 (2021) e26554.
29. A.V. Turbiner, J.C. del Valle. Comment on: Uncommonly accurate energies for the general quartic oscillator. Int. J. Quantum Chem. 121 (2021) e26766.
30. F.M. Fernández, J. Garcia. Highly accurate calculation of the real and complex eigenvalues of one-dimensional anharmonic oscillators. Acta Polytech. 57 (2017) 391.


Надійшла / Received 02.09.2024