

В. А. Бабенко*, О. В. Нестеров

Институт теоретической физики им. М. М. Боголюбова НАН Украины, Киев, Украина

*Відповідальний автор: pet2@ukr.net

**ПРО БІКВАДРАТИЧНИЙ АНГАРМОНІЧНИЙ ОСЦИЛЯТОР –
ПІДХІД У РАМКАХ РОЗКЛАДУ ПО ОСЦИЛЯТОРНОМУ БАЗИСУ.
I. ДОСЛІДЖЕННЯ ТА РОЗРАХУНОК ЕНЕРГІЙ ОСНОВНОГО І ЗБУДЖЕНИХ СТАНІВ**

Для квантового біквдратичного ангармонічного осцилятора з гамільтоніаном $H = \frac{1}{2}(p^2 + x^2) + \lambda x^4$, який є однією з класичних традиційних моделей квантової механіки та квантової теорії поля, докладно вивчаються і розраховуються його основні фізичні характеристики та властивості на основі застосування розкладу хвильової функції системи по повному набору власних функцій гармонічного осцилятора, тобто по базису власних функцій $\{\varphi_n^{(0)}\}$ незбуреного гамільтоніана $H^{(0)} = \frac{1}{2}(p^2 + x^2)$. Показано дуже хорошу збіжність розрахованих рівнів енергії ангармонічного осцилятора залежно від кількості врахованих у розкладі базисних функцій для широкого спектра зміни параметра λ . Таким чином нами розраховано енергії основного та шести перших збуджених станів системи в дуже широкому інтервалі зміни константи зв'язку осцилятора λ . У цілому використаний метод дає дуже хороший і точний спосіб розрахунку усіх фізичних характеристик системи.

Ключові слова: ангармонічний осцилятор, осциляторний базис, квантова теорія поля.

V. A. Babenko*, A. V. Nesterov

Bogolyubov Institute for Theoretical Physics, National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, Ukraine

*Corresponding author: pet2@ukr.net

**THE QUARTIC ANHARMONIC OSCILLATOR – AN OSCILLATOR-BASIS EXPANSION APPROACH.
I. ENERGY LEVELS STUDY AND CALCULATION**

For the quantum quartic anharmonic oscillator with the Hamiltonian $H = \frac{1}{2}(p^2 + x^2) + \lambda x^4$, which is one of the classic traditional quantum-mechanical and quantum-field-theory models, its main physical characteristics and properties are thoroughly studied and calculated based on the system's wave function expansion in a complete set of the harmonic oscillator eigenfunctions, i.e., in the basis of eigenfunctions $\{\varphi_n^{(0)}\}$ of the unperturbed Hamiltonian $H^{(0)} = \frac{1}{2}(p^2 + x^2)$. Very good convergence of the calculated energy levels of the anharmonic oscillator is demonstrated with respect to the number of basis functions included in the expansion, across a wide range of variation of the parameter λ . Thus, we have computed the energies of the ground and the first six excited states of the system for an exceptionally wide range of the oscillator coupling constant λ . In general, the proposed method provides a very good and accurate way to calculate all system characteristics.

Keywords: anharmonic oscillator, oscillator basis, quantum field theory.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ / REFERENCES

1. C.M. Bender, T.T. Wu. Anharmonic oscillator. *Phys. Rev.* 184 (1969) 1231.
2. F.T. Hioe, D. MacMillen, E.W. Montroll. Quantum theory of anharmonic oscillators. *Phys. Rep.* 43 (1978) 305.
3. D.I. Kazakov, D.V. Shirkov. Asymptotic series of quantum field theory and their summation. *Fortschr. Phys.* 28 (1980) 465.
4. B. Simon. Large orders and summability of eigenvalue perturbation theory: A mathematical overview. *Int. J. Quant. Chem.* 21 (1982) 3.
5. К. Ициксон, Ж.-Б. Зюбер. Квантовая теория поля. Том 2 (Москва: Мир, 1984) 400 с. / С. Itzykson, J.-B. Zuber. *Quantum Field Theory* (New York: McGraw-Hill, 1980) 705 p.
6. G.A. Arteca, F.M. Fernández, E.A. Castro. *Large Order Perturbation Theory and Summation Methods in Quantum Mechanics* (Berlin: Springer-Verlag, 1990) 644 p.
7. J.C. Le Guillou, J. Zinn-Justin (Eds.). *Large-Order Behaviour of Perturbation Theory* (Amsterdam: Elsevier Science Publishers, 1990) 594 p.
8. B. Simon. Fifty years of eigenvalue perturbation theory. *Bull. Am. Math. Soc.* 24 (1991) 303.
9. J. Zinn-Justin. *Quantum Field Theory and Critical Phenomena* (Oxford: Clarendon Press, 2002) 1054 p.
10. A.V. Turbiner, J.C. del Valle Rosales. *Quantum Anharmonic Oscillator* (Singapore: World Scientific, 2023) 308 p.

11. G. Lévai, J.M. Arias. Search for critical-point nuclei in terms of the sextic oscillator. *Phys. Rev. C* 81 (2010) 044304.
12. A.A. Raduta, P. Baganu. Application of the sextic oscillator with a centrifugal barrier and the spheroidal equation for some X(5) candidate nuclei. *J. Phys. G* 40 (2013) 025108.
13. R. Budaca. Quartic oscillator potential in the γ -rigid regime of the collective geometrical model. *Eur. Phys. J. A* 50 (2014) 87.
14. P. Baganu, R. Budaca. Analytical solution for the Davydov-Chaban Hamiltonian with a sextic potential for $\gamma=30^\circ$. *Phys. Rev. C* 91 (2015) 014306.
15. M.M. Hammad et al. Critical potentials and fluctuations phenomena with quartic, sextic, and octic anharmonic oscillator potentials. *Nucl. Phys. A* 1004 (2020) 122036.
16. A.S. Davydov, A.A. Chaban. Rotation-vibration interaction in non-axial even nuclei. *Nucl. Phys.* 20 (1960) 499.
17. J.P. Davidson. Rotations and vibrations in deformed nuclei. *Rev. Mod. Phys.* 37 (1965) 105.
18. О. Бор, Б. Моттelson. Структура атомного ядра. Том 2 (Москва: Мир, 1977) 664 с. / A. Bohr, B.R. Mottelson. *Nuclear Structure. Vol. 2* (New York: W. A. Benjamin, 1975) 748 p.
19. J.J. Loeffel et al. Pade approximants and the anharmonic oscillator. *Phys. Lett. B* 30 (1969) 656.
20. B. Simon. Coupling constant analyticity for the anharmonic oscillator. *Ann. Phys.* 58 (1970) 76.
21. C.M. Bender, T.T. Wu. Large-order behavior of perturbation theory. *Phys. Rev. Lett.* 27 (1971) 461.
22. C.M. Bender, T.T. Wu. Anharmonic oscillator. II. A study of perturbation theory in large order. *Phys. Rev. D* 7 (1973) 1620.
23. S.N. Biswas et al. Eigenvalues of λx^{2m} anharmonic oscillators. *J. Math. Phys.* 14 (1973) 1190.
24. F.T. Hioe, E.W. Montroll. Quantum theory of anharmonic oscillators. *J. Math. Phys.* 16 (1975) 1945.
25. K. Banerjee. Accurate non-perturbative solution of eigenvalue problems with application to anharmonic oscillator. *Lett. Math. Phys.* 1 (1976) 323.
26. A.V. Turbiner, A.G. Ushveridze. Anharmonic oscillator: Constructing the strong coupling expansions. *J. Math. Phys.* 29 (1988) 2053.
27. F. Vinette, J. Čížek. Upper and lower bounds of the ground state energy of anharmonic oscillators using renormalized inner projection. *J. Math. Phys.* 32 (1991) 3392.
28. E.J. Weniger, J. Čížek, F. Vinette. Very accurate summation for the infinite coupling limit of the perturbation series expansions of anharmonic oscillators. *Phys. Lett. A* 156 (1991) 169.
29. E.J. Weniger, J. Čížek, F. Vinette. The summation of the ordinary and renormalized perturbation series for the ground state energy of the quartic, sextic, and octic anharmonic oscillators using nonlinear sequence transformations. *J. Math. Phys.* 34 (1993) 571.
30. F.M. Fernández, R. Guardiola. Accurate eigenvalues and eigenfunctions for quantum-mechanical anharmonic oscillators. *J. Phys. A* 26 (1993) 7169.
31. E.J. Weniger. A convergent renormalized strong coupling perturbation expansion for the ground state energy of the quartic, sextic, and octic anharmonic oscillator. *Ann. Phys.* 246 (1996) 133.
32. F.M. Fernández, R. Guardiola. The strong coupling expansion for anharmonic oscillators. *J. Phys. A* 30 (1997) 7187.
33. A.V. Turbiner. Anharmonic oscillator and double well potential: Approximating eigenfunctions. *Lett. Math. Phys.* 74 (2005) 169.
34. A. Banerjee. A perturbative treatment of a generalized PT-symmetric quartic anharmonic oscillator. *Mod. Phys. Lett. A* 20 (2005) 3013.
35. E.Z. Liverts, V.B. Mandelzweig, F. Tabakin. Analytic calculation of energies and wave functions of the quartic and pure quartic oscillators. *J. Math. Phys.* 47 (2006) 062109.
36. A.J. Sous. Solution for the eigenenergies of sextic anharmonic oscillator potential. *Mod. Phys. Lett. A* 21 (2006) 1675.
37. H. Ciftci. Anharmonic oscillator energies by the asymptotic iteration method. *Mod. Phys. Lett. A* 23 (2008) 261.
38. H. Ezawa, M. Saito, T. Nakamura. Notes on the Padé approximation for an anharmonic oscillator. *J. Phys. Soc. Japan* 83 (2014) 034003.
39. F.M. Fernández, J. Garcia. Highly accurate calculation of the real and complex eigenvalues of one-dimensional anharmonic oscillators. *Acta Polytech.* 57 (2017) 391.
40. T. Sulejmanpasic, M. Ünsal. Aspects of perturbation theory in quantum mechanics. *Comp. Phys. Com.* 228 (2018) 273.
41. H. Mutuk. Energy levels of one-dimensional anharmonic oscillator via neural networks. *Mod. Phys. Lett. A* 34 (2019) 1950088.
42. J.C. del Valle, A.V. Turbiner. Radial anharmonic oscillator: Perturbation theory, new semiclassical expansion, approximating eigenfunctions. I. *Int. J. Mod. Phys. A* 34 (2019) 1950143.
43. J.C. del Valle, A.V. Turbiner. Radial anharmonic oscillator: Perturbation theory, new semiclassical expansion, approximating eigenfunctions. II. *Int. J. Mod. Phys. A* 35 (2020) 2050005.
44. P. Okun, K. Burke. Uncommonly accurate energies for the general quartic oscillator. *Int. J. Quantum Chem.* 121 (2021) e26554.

45. A.V. Turbiner, J.C. del Valle. Comment on: Uncommonly accurate energies for the general quartic oscillator. *Int. J. Quantum Chem.* 121 (2021) e26766.
46. A.V. Turbiner, J.C. del Valle. Anharmonic oscillator: a solution. *J. Phys. A* 54 (2021) 295204.
47. A.V. Turbiner, J.C. del Valle. From quartic anharmonic oscillator to double well potential. *Acta Polytech.* 62 (2022) 208.
48. В.А. Бабенко, Н.М. Петров. Про квантовий ангармонічний осцилятор та апроксимації Паде. *Ядерна фізика та енергетика* 22 (2021) 127. / V.A. Babenko, N.M. Petrov. On the quantum anharmonic oscillator and Padé approximations. *Nucl. Phys. At. Energy* 22 (2021) 127. (Ukr)
49. V.A. Babenko, N.M. Petrov. On the quartic anharmonic oscillator and the Padé-approximant averaging method. *Mod. Phys. Lett. A* 37 (2022) 2250172.
50. V. Vasilevsky et al. Algebraic model for scattering in three-s-cluster systems. I. *Phys. Rev. C* 63 (2001) 034606.
51. V. Vasilevsky et al. Algebraic model for scattering in three-s-cluster systems. II. *Phys. Rev. C* 63 (2001) 034607.
52. F. Arickx et al. The modified J-matrix approach for cluster descriptions of light nuclei. In: *The J-Matrix Method: Developments and Applications*. A.D. Alhaidari et al. (Eds.) (Berlin: Springer, 2008) p. 269.
53. А.В. Нестеров и др. Трехкластерное описание свойств легких нейтронно- и протонно-избыточных ядер в рамках алгебраической версии метода резонирующих групп. *ЭЧАЯ* 41 (2010) 1337. / A.V. Nesterov et al. Three-cluster description of properties of light neutron- and proton-rich nuclei in the framework of the algebraic version of the resonating group method. *Phys. Part. Nucl.* 41 (2010) 716.
54. M. Moshinsky, Y.F. Smirnov. *The Harmonic Oscillator in Modern Physics* (Amsterdam: Harwood Academic Publishers, 1996) 414 p.
55. N.W. Bazley, D.W. Fox. Lower bounds for eigenvalues of Schrödinger's equation. *Phys. Rev.* 124 (1961) 483.
56. S.I. Chan, D. Stelman, L.E. Thompson. Quartic oscillator as a basis for energy level calculations of some anharmonic oscillators. *J. Chem. Phys.* 41 (1964) 2828.
57. P.-F. Hsieh, Y. Sibuya. On the asymptotic integration of second order linear ordinary differential equations with polynomial coefficients. *J. Math. Anal. Appl.* 16 (1966) 84.
58. F.J. Dyson. Divergence of perturbation theory in quantum electrodynamics. *Phys. Rev.* 85 (1952) 631.
59. А.В. Турбинер. Задача о спектре в квантовой механике и процедура «нелинеаризации». *УФН* 144 (1984) 35. / A.V. Turbiner. The eigenvalue spectrum in quantum mechanics and the nonlinearization procedure. *Sov. Phys. Usp.* 27 (1984) 668.
60. А.С. Давыдов. *Квантовая механика* (Москва: Наука, 1973) 704 с. / A.S. Davydov. *Quantum Mechanics* (Oxford: Pergamon Press, 1976) 636 p.
61. І.О. Вакарчук. *Квантова механіка* (Львів: ЛНУ ім. Івана Франка, 2012) 872 с. / I.O. Vakarchuk. *Quantum Mechanics* (Lviv: IFNU of Lviv, 2012) 872 p. (Ukr)
62. R. McWeeny, C.A. Coulson. Quantum mechanics of the anharmonic oscillator. *Math. Proc. Cambridge* 44 (1948) 413.
63. C. Schwartz. A study of some approximation schemes in quantum mechanics. *Ann. Phys.* 32 (1965) 277.

Надійшла / Received 02.05.2024