

В. А. Бабенко*, Н. М. Петров

Інститут теоретичної фізики ім. М. М. Боголюбова НАН України, Київ, Україна

*Відповідальний автор: pet2@ukr.net

ПРО КВАНТОВИЙ АНГАРМОНІЧНИЙ ОСЦИЛЯТОР ТА АПРОКСИМАЦІЇ ПАДЕ

Для квантового біквдратичного ангармонічного осцилятора з гамільтоніаном $H = \frac{1}{2}(p^2 + x^2) + \lambda x^4$, який є однією з традиційних моделей квантової механіки та квантової теорії поля, вивчається підсумовування факторіально розбіжного ряду теорії збурень на основі запропонованого методу усереднення відповідних даному ряду Паде-апроксимант. Уперше сконструйовано апроксимації типу Паде, які мають правильну асимптотику на нескінченності при зростанні константи зв'язку λ , що дає істотні теоретичні та практично-обчислювальні переваги в застосуваннях даного методу. Вивчено збіжність застосованих апроксимацій та розраховано запропонованим методом значення енергії $E_0(\lambda)$ основного стану ангармонічного осцилятора в широкій області зміни константи зв'язку λ .

Ключові слова: ангармонічний осцилятор, квантова теорія поля, теорія збурень, Паде-апроксиманти.

1. Вступ

Одновимірний квантовий ангармонічний осцилятор, як добре відомо [1 - 4], є однією з найпростіших і водночас явно реалістичних моделей квантової теорії поля та у той же час традиційною моделлю квантової механіки. Таким чином, більш реалістичні та багатовимірні квантово-польові моделі, які є деякими узагальненнями, повинні мати в цілому деякий ряд таких же принципових характерних якостей, що й одновимірний ангармонічний осцилятор. Зокрема, однією з основних типових властивостей, притаманних квантово-польовим та багатьом квантово-механічним моделям, є властивість розбіжності ряду теорії збурень, яка має місце вже для такої простої моделі, як біквдратичний ангармонічний осцилятор. Нарівні з вищезазначеним ангармонічний осцилятор має також великий самостійний інтерес, як одна з відносно простих і в той же час характерних моделей квантової механіки та квантової теорії поля [1, 5 - 8]. Слід особливо підкреслити, що ангармонічний осцилятор постійно викликає значний інтерес у дослідженнях завдяки відносно простому, але в той же час істотно нетривіальному та показовому характеру даної моделі, а також завдяки можливим практичним застосуванням. Загальна кількість робіт, присвячених ангармонічному осцилятору, нараховує сотні, включаючи ряд нещодавніх робіт [9 - 11]. Зазначимо при цьому, що значне зростання інтересу до даної моделі та велике збільшення кількості робіт по даному питанню сталося слідом за появою піонерської роботи Бендера та Ву [1], де вперше була строго

доведена розбіжність ряду теорії збурень для енергії основного стану $E_0(\lambda)$ ангармонічного осцилятора в усій комплексній площині константи зв'язку λ за виключенням початку координат. Оскільки подібні типи розбіжності було рівним чином далі знайдено та досліджено також і в інших квантово-механічних та квантово-польових системах, то робота Бендера та Ву по суті призвела до виникнення цілого нового дослідницького напрямку, який звичайно називають теорією збурень високих порядків ("large order perturbation theory") [6 - 8, 11 - 13]. Насправді фактично Бендером і Ву була вперше строго доведена розбіжність ряду теорії збурень для цілком конкретної моделі квантової теорії поля, хоча й однієї з найпростіших. Таким чином, вивченню моделі ангармонічного осцилятора завжди приділялась та продовжує приділятися виключно велика увага [1 - 13] як з точки зору квантової механіки, так і з точки зору квантової теорії поля, однак при цьому дана модель у постановці, яка використовується в даній роботі, є перш за все квантово-механічною моделлю.

Указана вище розбіжність рядів теорії збурень квантової теорії в багатьох конкретних випадках не тільки має інтерес, але й несе разом із собою значні теоретичні та практичні труднощі для конкретного застосування та обчислень. При цьому одним з дуже зручних практичних методів розрахунку, який давно знаходить широке застосування при роботі з розбіжними рядами, є метод підсумовування цих рядів за допомогою Паде-апроксимант [7, 14, 15]. У представленій роботі нами пропонується та досліджується спосіб

модифікації і відповідно покращення даного методу, який ґрунтується на проведенні того чи іншого способу усереднення головної діагональної та першої наддіагональної Паде-апроксимант, які звичайно частіш за все використовуються при конкретних практичних розрахунках. Запропонований метод усереднення, як показано відповідними розрахунками та аналізом, дає суттєві переваги та зручності в застосуванні методу Паде-апроксимант, зокрема дозволяє мінімум на два-три порядки збільшити ефективність розрахунків, а також дає можливість забезпечити правильну асимптотику розраховуваних рівнів енергії при великих значеннях константи зв'язку, чого не дозволяє традиційний спосіб застосування Паде-апроксимант. У зв'язку із запропонованим методом слід особливо підкреслити, що більшість способів підсумовування розбіжних рядів базується на використанні того чи іншого способу усереднення членів та/або часткових сум первинного розбіжного ряду [16, 17], так що сама по собі ідея використання деякого методу усереднення аж ніяк не нова. Однак у застосуванні до способу підсумовування за допомогою Паде-апроксимант запропоновані способи усереднення пропонуються вперше. Проілюструємо вищенаведене відповідним твердженням із класичної монографії Г. Харді [16] по розбіжних рядах: «Теорія розбіжних рядів має своїм предметом узагальнення поняття границі послідовності (s_n) . Ці узагальнення здійснюються звичайно за допомогою деякої допоміжної послідовності лінійних середніх, утворених з членів послідовності (s_n) » [16, с. 61]. Під (s_n) тут розуміється часткова сума відповідного розбіжного ряду. Таким чином, більшість методів роботи з розбіжними рядами та їхнього підсумовування є методами усереднення.

2. Деякі властивості ряду теорії збурень для біквадратичного ангармонічного осцилятора

Модель одновимірного біквадратичного, що зветься також квартичним ("quartic"), ангармонічного квантового осцилятора з гамільтоніаном

$$H = H_0 + \lambda V = \frac{1}{2}(p^2 + x^2) + \lambda x^4 \quad (1)$$

є однією з класичних традиційних моделей квантової механіки і квантової теорії поля [1 - 13]. Розклад стандартної теорії збурень Релея - Шредингера для енергії $E_0(\lambda)$ основного стану даної моделі може бути записано у вигляді звичайного степеневого розкладу в околі точки $\lambda = 0$ по сте-

пеням константи зв'язку λ [1 - 8]:

$$E_0(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \lambda^n = A_0 + A_1 \lambda + A_2 \lambda^2 + \dots, \quad (2)$$

де перший коефіцієнт $A_0 = 1/2$ цього розкладу дає добре відоме значення основного рівня енергії звичайного гармонічного осцилятора: $E_0(0) = 1/2$. При цьому, відповідно до звичних угод, ми всюди без обмеження загальності використовуємо систему одиниць, в якій основні параметри осцилятора прийняті рівними одиниці ($\hbar = 1, m = 1, \omega = 1$), так що $E_0(0) = \hbar\omega/2 = 1/2$. Бендер і Ву [1] запропонували використати для розрахунку коефіцієнтів A_n ряду (2) отриману ними з рівняння Шредингера для даної квантово-механічної моделі систему рекурентних співвідношень для деяких допоміжних коефіцієнтів $B_{i,j}$, яка може бути записана у вигляді

$$2jB_{i,j} = (j+1)(2j+1)B_{i,j+1} + B_{i-1,j-2} - \sum_{p=1}^{i-1} B_{i-p,1} B_{p,j}. \quad (3)$$

Шукані коефіцієнти A_n розкладу (2) виражаються через константи $B_{i,j}$ за формулою

$$A_n = -B_{n,1}. \quad (4)$$

Послідовне обчислення коефіцієнтів A_n відповідно вищенаведеним рекурентним співвідношенням показує їхнє дуже швидке і значне зростання в міру зростання порядку коефіцієнта. Наведемо для ілюстрації перші вісім коефіцієнтів розкладу (2):

$$A_0 = \frac{1}{2}, A_1 = \frac{3}{4}, A_2 = -\frac{21}{8}, A_3 = \frac{333}{16}, A_4 = -\frac{30885}{128},$$

$$A_5 = \frac{916731}{256}, A_6 = -\frac{65518401}{1024}, A_7 = \frac{2723294673}{2048}. \quad (5)$$

Таке швидке чисельне зростання коефіцієнтів відразу викликає сумніви в можливості збіжності ряду (2) навіть при скільки завгодно малих значеннях константи зв'язку λ . Справді, Бендером та Ву [1] у результаті детального аналізу було доведено факторіальне асимптотичне зростання коефіцієнтів A_n в міру зростання їхнього порядку

$$A_n \underset{n \rightarrow \infty}{\simeq} (-1)^{n+1} \sqrt{\frac{6}{\pi^3}} 3^n \Gamma(n + \frac{1}{2}), \quad (6)$$

а також ними було строго доведено розбіжність ряду (2) для будь-яких значень константи зв'язку λ , відмінних від нуля. Насправді для ангармонічного осцилятора, що визначається гамільтоніа-

ном (1), було запропоновано ще цілий ряд якісних аргументів, що свідчать на користь розбіжності ряду теорії збурень [5, 18 - 20], з яких найбільш важливим та відомим є так званий “аргумент нестійкості Дайсона”. Цікавим та повчальним є аналіз розбіжного ряду (2) на предмет

можливості отримання з його допомогою деяких конкретних результатів. Можливість практичних результатів, що мають сенс, обмежена в даному випадку областю вкрай малих значень константи зв'язку, як показують розрахунки, – реальною областю $\lambda \lesssim 0,01$.

Таблиця 1. Значення енергії E_0 основного рівня ангармонічного осцилятора, розраховані в різних порядках N розкладу розбіжного ряду (2) теорії збурень при деяких значеннях константи зв'язку λ із області слабого зв'язку $\lambda \lesssim 0,1$

N	$\lambda = 0,005$	$\lambda = 0,01$	$\lambda = 0,03$	$\lambda = 0,05$	$\lambda = 0,07$	$\lambda = 0,1$
2	0,50368438	0,50723750	0,52014	0,531	0,540	0,55
3	0,50368698	0,50725831	0,52070	0,534	0,547	0,57
4	0,50368683	0,50725590	0,52050	0,532	0,541	0,55
5	0,50368684	0,50725626	0,52059	0,533	0,547	0,58
6	0,50368684	0,50725619	0,52054	0,532	0,539	0,52
7	0,50368684	0,50725621	0,52057	0,533	0,550	0,65
8	0,50368684	0,50725620	0,52055	0,532	0,532	0,34
9	0,50368684	0,50725620	0,52057	0,534	0,566	1,17
10	0,50368684	0,50725620	0,52055	0,531	0,497	-1,28
11	0,50368684	0,50725620	0,52057	0,535	0,653	6,61
12	0,50368684	0,50725620	0,52055	0,528	0,269	-21,12
N_{min}	0,50368684 ($N_{min} = 67$)	0,50725620 ($N_{min} = 33$)	0,52057 ($N_{min} = 11$)	0,532 ($N_{min} = 6$)	0,541 ($N_{min} = 4$)	0,57 ($N_{min} = 3$)
.....
200	$-3,018 \cdot 10^8$	$-5,543 \cdot 10^{68}$	$-1,628 \cdot 10^{164}$	$-3,895 \cdot 10^{208}$	$-6,610 \cdot 10^{237}$	$-6,362 \cdot 10^{268}$
201	$9,089 \cdot 10^8$	$3,337 \cdot 10^{69}$	$2,938 \cdot 10^{165}$	$1,172 \cdot 10^{210}$	$2,783 \cdot 10^{239}$	$3,827 \cdot 10^{270}$
Ex.	0,50368684	0,50725620	0,52056172	0,53264275	0,54378878	0,55914633

П р и м і т к а. N_{min} – номер найменшого за абсолютною величиною члену ряду (2). В останньому рядку таблиці “Ex.” (“Exact”) наведено точні значення.

Відповідні розрахунки енергії основного рівня $E_0(\lambda)$ ангармонічного осцилятора наведено в табл. 1. При цьому слід відзначити, що для практичної роботи з асимптотичним розбіжним рядом, таким як ряд (2), є два практичних можливих критерія отримання осмислених результатів: по-перше, це критерій практичної збіжності часткових сум ряду до деякого чисельного результату (див. 2-й і 3-й стовпці табл. 1); по-друге, критерій підсумовування асимптотичного ряду включно до найменшого по абсолютній величині члена цього ряду [17] – номер цього найменшого члена ряду означимо N_{min} . Як показують результати розрахунків, при збільшенні константи зв'язку вище значення $\lambda = 0,01$ точність розрахунків за будь-яким з цих двох критеріїв починає швидко та різко знижуватись, при цьому перший критерій швидко втрачає свою придатність взагалі, а другий критерій дає результати все гіршої точності. Також у табл. 1 відповідними розрахунками (при $N = 200$ і $N = 201$ в якості прикладів) продемонстрована неминуха розбіжність ряду (2), яка рано чи пізно настає при будь-

якому, навіть скільки завгодно малому, значенню параметра λ та виявляється в неминучому початку різкого зростання часткових сум ряду (2) унаслідок факторіального зростання його коефіцієнтів. Таким чином, область практично можливого безпосереднього застосування розбіжного ряду теорії збурень (2) є виключно малою та обмежена значеннями константи зв'язку $\lambda \lesssim 0,01$.

3. Паде-апроксиманти та деякі їхні властивості для випадку ряду теорії збурень біквадратичного ангармонічного осцилятора

Наведене вище аж ніяк не означає некорисності ряду теорії збурень поза областю слабого зв'язку, оскільки по відношенню до розбіжного ряду (2) можливо застосувати розроблені методи підсумовування розбіжних рядів. Справді, для ряду (2) було строго доведено [5 - 8, 21], що він є асимптотичним рядом при $\lambda \rightarrow 0$ у сенсі Пуанкаре. Та додатково було доведено, що розклад (2) визначає функцію $E_0(\lambda)$ однозначним чином. Для асимптотичних рядів загального вигляду останнє твердження, як відомо, несправедливо.

Проте для випадку ангармонічного осцилятора розклад (2), тобто нескінченний набір його коефіцієнтів $\{A_n\}$, теоретично визначає значення енергії основного стану $E_0(\lambda)$ як функції константи зв'язку при будь-яких значеннях λ . Однак відразу не зовсім ясно, як саме конкретно можливо скористатися даною інформацією. З цією метою одним із можливих та практично ефективних методів розрахунку з розбіжними рядами є спосіб підсумовування розбіжних рядів за допомогою Паде-апроксимант. При цьому для даної моделі ангармонічного осцилятора була доведена збіжність будь-яких Паде-апроксимант $[N + J / N]$, $J \geq 0$ до точного значення функції $E_0(\lambda)$ [10, 21, 22]. Апроксимаціями Паде, як відомо [14, 15], називають спеціального виду раціональні наближення у вигляді відношення двох поліномів для деякої функції

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad (7)$$

що задана своїм степеневим рядом, які побудовані таким чином, щоб розклад Паде-апроксиманти в ряд Тейлора в нулі співпадав з розкладом (7) аж до максимально високого порядку, наскільки це можливо згідно з наявною кількістю вільних коефіцієнтів апроксиманти. Тобто апроксимації Паде – це локально найкращі раціональні наближення функції, яка задана своїм розкладом в степеневий ряд Тейлора в точці. Більш точно, апроксимація Паде – це раціональна функція, що має вигляд [14]

$$[L / M] \equiv [L / M]_f(z) = \frac{P_L(z)}{Q_M(z)} = \frac{a_0 + a_1 z + \dots + a_L z^L}{b_0 + b_1 z + \dots + b_M z^M} \quad (8)$$

і задана таким чином, щоб її $L + M + 1$ вільних коефіцієнтів (при угоді $b_0 = 1$) давали коефіцієнти тейлоровського розкладу функції (8), що збігаються з відповідними коефіцієнтами ряду (7) аж до степені $L + M$ включно, тобто

$$f(z) - \frac{P_L(z)}{Q_M(z)} = O(z^{L+M+1}). \quad (9)$$

Аргумент z функції $[L / M](z)$ звичайно для стислості опускають, записуючи її просто у вигляді $[L / M]$. Зазначимо, що дане класичне означення (8), (9) Паде було уточнено Бейкером (див. у [14]). Умова (9) однозначним чином

визначає Паде-апроксиманту $[L / M]$, а поліноми $P_L(z)$ та $Q_M(z)$ визначаються при цьому з точністю до однієї нормувальної константи-множника, яка фіксується звичайно умовною угодою $b_0 = 1$. Для коефіцієнтів $\{b_i\}_{i=0}^M$ і $\{a_j\}_{j=0}^L$ поліномів $Q_M(z)$ та $P_L(z)$ мають місце системи лінійних алгебраїчних рівнянь Паде [14, 15], які дозволяють обчислити дані коефіцієнти по перших відомих $L + M + 1$ коефіцієнтах $\{c_k\}_{k=0}^{L+M+1}$ розкладу Тейлора (7) для заданої функції $f(z)$.

Тепер використовуємо деякі доведені властивості Паде-апроксимант функції $E_0(\lambda)$, які безпосередньо впливають з її розкладу в ряд теорії збурень (2) та із знайдених властивостей коефіцієнтів A_n даного ряду [1, 21]. Бендером та Ву [1] була доведена важлива властивість, що всі коефіцієнти A_n є знакозмінними при $n \geq 1$, тобто починаючи з коефіцієнта A_1 . Таким чином, ряд теорії збурень (2) є знакозмінним при дійсних додатних λ , починаючи з другого члена. Ще більш сильне та важливе доведене твердження [10, 21] полягає в тому, що починаючи з другого члена ряд (2) є так званим рядом Стілтєса, тобто фактично ряд $\sum_{n=1}^{\infty} A_n \lambda^{n-1}$ є рядом Стілтєса для функції $\tilde{E}_0(\lambda) \equiv (E_0(\lambda) - 1/2) / \lambda$. Дана доведена властивість дозволяє використати відомі нерівності та оцінки для Паде-апроксимант, що описують їхню монотонну збіжність для даного випадку [14, 15]. Використавши далі ту очевидну властивість, що діагональна Паде-апроксиманта функції $\tilde{E}_0(\lambda)$ є першою наддіагональною Паде-апроксимантою функції $E_0(\lambda)$, нам буде зручно відразу сформулювати відповідні властивості монотонності та збіжності для Паде-апроксимант безпосередньо функції $E_0(\lambda)$, тобто ряду (2). Із результатів [10, 21, 22], таким чином, впливає, що, по-перше, головні діагональні Паде-апроксиманти $[N / N]$ ряду (2) для функції $E_0(\lambda)$ при дійсних додатних λ утворюють монотонну зростаючу послідовність, яка дає оцінку знизу точного значення цієї функції:

$$[0 / 0] < [1 / 1] < \dots < [N / N] < [N + 1 / N + 1] < \dots < E_0(\lambda). \quad (10)$$

По-друге, перші наддіагональні Паде-апроксиманти $[N + 1 / N]$ ряду (2) для функції $E_0(\lambda)$ при дійсних додатних λ утворюють монотонну спадаючу послідовність, яка дає оцінку зверху точ-

ного значення цієї функції:

$$[1/0] > [2/1] > \dots > [N+1/N] > [N+2/N+1] > \dots > E_0(\lambda). \quad (11)$$

Оскільки набір Паде-апроксимант прийнято записувати у вигляді таблиці, яка носить назву таблиці Паде, то ми відповідно приймаємо за головні діагональні апроксиманти елементи цієї таблиці, що знаходяться на головній її діагоналі, а за наддіагональні апроксиманти приймаємо перші наддіагональні елементи цієї таблиці вище головної діагоналі (див. [14]). Подальше викладення властивостей Паде-апроксимант, їхні властивості монотонної збіжності для випадку рядів Стілтєса, означення та обговорення властивостей самих рядів Стілтєса, а також конкретні докази властивостей Паде-апроксимант та збіжності їх у випадку ангармонічного осцилятора наведено у [10, 14, 15, 21, 22]. Об'єднуючи властивості (10) та (11), можемо записати оцінку функції $E_0(\lambda)$ при дійсних додатних значеннях λ таким чином

$$[N/N] < E_0(\lambda) < [N+1/N]. \quad (12)$$

Слід особливо підкреслити, що в більшості застосувань, за відсутності будь-якої додаткової інформації, для конкретних розрахунків та оцінок використовують звичайно діагональні Паде-апроксиманти. Останнє викликано тим очевидним міркуванням, що чим більше апроксиманта буде відхилитися від діагональної, тим її властивості будуть “ближче” до властивостей звичайного полінома і тим більше будуть втрачатися вигоди її використання.

4. Побудова апроксимації у вигляді середньозваженого геометричного діагональної та наддіагональної Паде-апроксимант і розрахунки на її основі

Оцінка (12) приводить нас далі до висновку про те, що при конкретних обчисленнях значення функції $E_0(\lambda)$ за допомогою Паде-апроксимант теоретично може скластися дві різні ситуації. По-перше, суто теоретично можлива ситуація, при якій або діагональна $[N/N]$, або перша наддіагональна $[N+1/N]$ Паде-апроксиманта будуть давати помітно більш хорошу та точну розрахункову оцінку обчислювальної функції – одна в порівнянні з іншою. Дана можливість може реалізуватися, якщо значення однієї з вищевказаних апроксимант при зростанні порядку апроксимант N будуть систематично виявлятися значно ближче до точного значення розра-

ховуваної функції, ніж значення іншої апроксиманти та забезпечувати, таким чином, більш швидко збіжність залежно від N .

Проте наші розрахунки, а також розрахунки однієї з останніх робіт [10] із застосування Паде-апроксимант до ангармонічного осцилятора показують, що застосування наддіагональних Паде-апроксимант $[N+1/N]$ не дає жодних обчислювальних переваг у даних розрахунках і швидкість збіжності їх практично така ж, як і швидкість збіжності діагональних Паде-апроксимант $[N/N]$. Даний факт буде також продемонстровано нами в подальших розрахунках. Таким чином, дана теоретична можливість на практиці у випадку ангармонічного осцилятора не реалізується. Відзначимо, що в недавній роботі японської групи [10] використання наддіагональних Паде-апроксимант було обумовлено тією обставиною, що в даній роботі конкретно будувались діагональні Паде-наближення функції $\tilde{E}_0(\lambda) \equiv (E_0(\lambda) - 1/2)/\lambda$, які, очевидно, фактично приводять до наддіагональних Паде-наближень функції $E_0(\lambda)$. Таким чином, дуже привабливою та маючою місце на практиці виявляється інша теоретична можливість, що впливає з оцінки (12), а саме, точне значення розраховуваної функції $E_0(\lambda)$ виявляється розміщеним десь приблизно посередині між значеннями діагональної $[N/N]$ і наддіагональної $[N+1/N]$ Паде-апроксимант, а тому цілком природним буде використати для розрахунку значень функції $E_0(\lambda)$ деяке усереднене значення апроксимант $[N/N]$ і $[N+1/N]$, яке може дати набагато більш хорошу та точну оцінку розраховуваної величини. Дана властивість цілком безперечно, як буде показано в подальших розрахунках, має місце в даному випадку для ангармонічного осцилятора, однак вона може мати місце, очевидно, і в багатьох інших випадках, коли для розраховуваної величини має місце оцінка виду (12). Тобто ми природним чином приходимо до питання про спосіб усереднення головної діагональної $[N/N]$ і першої наддіагональної $[N+1/N]$ Паде-апроксимант для отримання більш оптимальної оцінки розраховуваного значення функції $E_0(\lambda)$. Найбільш простим і природним способом оцінки розраховуваної величини $E_0(\lambda)$ є використання середнього арифметичного діагональної $[N/N]$ та наддіагональної $[N+1/N]$ Паде-апроксимант, тобто визначення їхнього середнього за формулою

$$A_N(\lambda) \equiv \frac{1}{2} \{ [N/N] + [N+1/N] \}. \quad (13)$$

При цьому розрахунки показують, що вже використання найпростішого середньоарифметичного усередненого значення (13) Паде-апроксимант дозволяє відчутно збільшити точність розраховуваної величини та пришвидшити збіжність залежно від порядку апроксимант N . Ефективність розрахунків при цьому зростає як мінімум на два порядки. Слід зазначити, що це найпростіше усереднення Паде-апроксимант (13) було використано в роботі [23] для розрахунку енергії кубічного осцилятора. Разом з тим, однак, апроксимація (13) має той же основний теоретичний та практичний недолік, що й апроксимації $[N/N]$ і $[N+1/N]$ окремо, – це неправильна асимптотична поведінка в міру зростання значень λ в області сильного зв'язку, яка відзначалась ще в найперших роботах [21, 22] по застосуванню даного методу до аналізованої задачі. Саме неправильна асимптотика Паде-апроксимант при $\lambda \rightarrow \infty$ є однією з основних причин погіршення швидкості збіжності та точності розрахунків у міру зростання константи зв'язку λ . Зупинимось на цьому більш докладно. Для функції $E_0(\lambda)$, виходячи з відносно простих розмірних міркувань, а саме з масштабного перетворення Шиманчика (Symanzik) [21, 22], неважко встановити її наступну асимптотичну поведінку на нескінченності:

$$E_0(\lambda) \underset{\lambda \rightarrow \infty}{\simeq} c_0 \lambda^{1/3}. \quad (14)$$

У той же час асимптотична поведінка Паде-апроксимант при зростанні λ , як очевидно з самого означення (8), дається наступними співвідношеннями для головної діагональної $[N/N]$ та першої наддіагональної $[N+1/N]$ Паде-апроксимант:

$$[N/N] \underset{\lambda \rightarrow \infty}{\simeq} c', \quad (15)$$

$$[N+1/N] \underset{\lambda \rightarrow \infty}{\simeq} c'' \lambda, \quad (16)$$

де у формулах (14) - (16) c_0, c', c'' – деякі константи. Таким чином, апроксиманта $[N/N]$ «недооцінює» справжнє зростання функції $E_0(\lambda)$ при $\lambda \rightarrow \infty$, у той час як апроксиманта $[N+1/N]$ це зростання «переоцінює». Середнє арифметичне $A_N(\lambda)$ (13) у цілому, очевидно, за рахунок усереднення буде дещо покращувати асимптотичну поведінку аналізованої функції в порівнянні з апроксимантами $[N/N]$ і

$[N+1/N]$ окремо, – у деякій додатковій області зростання параметра λ . Однак надалі в міру подальшого зростання величини λ асимптотика функції $A_N(\lambda)$ буде з неминучістю виходити на асимптотику (16), тобто знову ж мати неправильну поведінку при великих значеннях λ . Деякого подальшого покращення асимптотичної поведінки розраховуваної величини при зростанні λ можна досягти, якщо замість середнього арифметичного (13) використати середнє геометричне

$$G_N(\lambda) \equiv \sqrt{[N/N] \cdot [N+1/N]} \quad (17)$$

діагональної $[N/N]$ та наддіагональної $[N+1/N]$ Паде-апроксимант. Функція $G_N(\lambda)$, очевидно, буде мати при зростанні λ асимптотичну поведінку $G_N(\lambda) \underset{\lambda \rightarrow \infty}{\simeq} \tilde{c} \lambda^{1/2}$, яка вже значно ближча до істинної асимптотики (14) функції $E_0(\lambda)$. Однак чисельні розрахунки з використанням середнього геометричного (17) Паде-апроксимант виявили достатньо невелике в цілому покращення загальної картини збіжності та покращення асимптотичної поведінки при зростанні λ . Разом з тим у світлі вищезрозглянутого є достатньо простий спосіб запровадження усередненої апроксимації, який забезпечить абсолютно правильну асимптотику цієї апроксимації на нескінченності при зростанні параметра λ . А саме розглянемо узагальнення апроксимації (17), обираючи усереднення у вигляді добре відомого середнього геометричного зваженого [24 - 26] Паде-апроксимант $[N/N]$ та $[N+1/N]$ з використанням довільних нормованих вагових коефіцієнтів w_1 і w_2 :

$$G_N^w(\lambda) \equiv [N/N]^{w_1} \cdot [N+1/N]^{w_2}. \quad (18)$$

Для дійсних додатних коефіцієнтів w_1, w_2 при цьому мають місце звичайні умови, яким повинні задовольняти вагові коефіцієнти усереднення [24 - 26]

$$0 \leq w_1, w_2 \leq 1, \quad (19)$$

$$w_1 + w_2 = 1. \quad (20)$$

Відзначимо, що в загальному випадку коефіцієнти w_i повинні залежати від значень величин N і λ . При виборі вагів, що дорівнюють $w_1 = w_2 = 1/2$ з наближення (18) випливає наближення (17) у вигляді звичайного середнього

геометричного. Однак якщо обрати значення вагів, що дорівнюють

$$w_1 = \frac{2}{3}, w_2 = \frac{1}{3}, \quad (21)$$

то в цьому випадку усереднене наближення

$$G_N^{w=1/3}(\lambda) \equiv [N/N]^{2/3} \cdot [N+1/N]^{1/3} \quad (22)$$

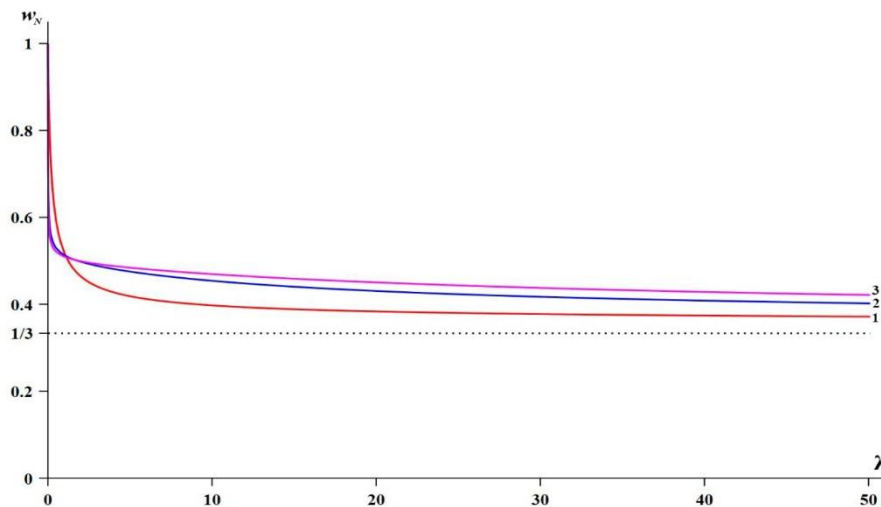
буде, очевидно, мати на нескінченності абсолютно правильну асимптотичну поведінку вигляду (14). Оскільки, однак, розрахунки показують, що вихід на асимптоту (14) здійснюється в цілому достатньо повільно, то має істотний сенс розглянути більш загальне усереднене наближення вигляду (18) з урахуванням залежності його вагових коефіцієнтів від величин N та λ . Запроваджуючи для зручності подальшого розгляду єдину вагову функцію $w_N(\lambda)$, яку означимо за допомогою співвідношення $w_2 \equiv w_N(\lambda)$, ми будемо таким чином, із урахуванням формул (18) і (20), використовувати надалі наступне загальне означення усередненого значення головної діагональної $[N/N]$ та першої наддіагональної $[N+1/N]$ Паде-апроксимант:

$$G_N^w(\lambda) \equiv [N/N]^{1-w_N(\lambda)} \cdot [N+1/N]^{w_N(\lambda)}. \quad (23)$$

Апроксимація (23), будучи узагальненням (22), є дуже корисною, плідною та вигідною в багатьох відношеннях, як буде видно далі. Дійсна додатна вагова функція $w_N(\lambda)$ при цьому повинна мати наступні властивості, що впливають з (19) і (14) та забезпечують правильну асимптоту апроксимації (23) на нескінченності:

$$0 \leq w_N(\lambda) \leq 1, w_N(\lambda) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{3}. \quad (24)$$

Таким чином, загальна апроксимація (23) у вигляді середньозваженого геометричного головної діагональної $[N/N]$ та першої наддіагональної $[N+1/N]$ Паде-апроксимант з ваговою функцією $w_N(\lambda)$, що задовольняє умовам (24), дає абсолютно правильну асимптоту вигляду (14) цієї апроксимації на нескінченності та, поряд з цим, вона є дуже зручним і плідним узагальненням звичайного стандартного наближення у вигляді апроксимант $[N/N]$ або $[N+1/N]$. Дійсно, при $w_N(\lambda) \equiv 0$ апроксимація (23), очевидно, перетворюється на діагональну Паде-апроксиманту $G_N^{w=0}(\lambda) = [N/N]$, а при $w_N(\lambda) \equiv 1$ вона відповідно перетворюється в наддіагональну апроксиманту $G_N^{w=1}(\lambda) = [N+1/N]$. Крім того, особливо підкреслимо, що апроксимація (23) у вигляді усереднення Паде-апроксимант має ту ж головну визначальну властивість Паде-апроксимант, що й діагональна апроксиманта $[N/N]$ сама по собі, а саме, вона дає коефіцієнти тейлоровського розкладу функції (23), що співпадають з відповідними коефіцієнтами A_n ряду (2) аж до степені $2N$ включно. Останнє легко бачити, якщо підставити в апроксимацію (23) відповідні тейлоровські розклади апроксимант $[N/N]$ і $[N+1/N]$ та обмежитися в них першими $2N+1$ членами, які в силу означення збігаються з відповідним відрізком первинного розкладу (2) і, відповідно, збігаються між собою.



Точна вагова функція $w_N(\lambda)$ апроксимації (23) залежно від константи зв'язку λ для $N=0, 25, 50$ (криві 1, 2 і 3 відповідно), розрахована чисельно в припущенні точного чисельного співпадіння апроксимації (23) з істинним значенням функції $E_0(\lambda)$.

На рисунку показано поведінку реальної розрахованої чисельно вагової функції $w_N(\lambda)$ для деяких значень порядку N у припущенні точного чисельного співпадіння апроксимації (23) з істинним значенням функції $E_0(\lambda)$. Рисунок ілюструє, що функція $w_N(\lambda)$ при будь-яких N є дуже плавною, гладкою та монотонно спадаючою від значення $w_N(0)=1$ до значення $w_N(\infty)=1/3$ функцією на всьому інтервалі її змінення $0 \leq \lambda < \infty$. Особлива плавність і надзвичайно слабке змінення відрізняють вагову функцію в області сильного зв'язку. Таким чином, у дійсності функція $w_N(\lambda)$ при будь-яких N задовольняє більш сильним та обмежуючим умовам, ніж умови (24), а саме

$$\frac{1}{3} \leq w_N(\lambda) \leq 1, \quad (25)$$

$$w_N(0) = 1, \quad w_N(\lambda) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{3}. \quad (26)$$

Для конкретних чисельних розрахунків слід певним чином обрати, тобто фактично постулювати, функцію $w_N(\lambda)$ з урахуванням її загальних властивостей. Найпростішим та найлегшим для реалізації способом є вибір вагової функції у вигляді деякої константи W ($1 \geq W \geq 1/3$), що не залежить від N , оскільки рисунок дійсно показує не дуже істотну залежність від N , яка, до того ж, послаблюється в міру зростання порядку:

$$w_N(\lambda) = W(\lambda), \quad \frac{1}{3} \leq W(\lambda) \leq 1. \quad (27)$$

При цьому ваговий фактор W зручно розглядати як варіаційний припасувальний параметр, а визначити оптимальне значення цієї константи в кожному конкретному розрахунку при заданому фіксованому значенні λ легко з умови забезпечення найбільшої швидкості практичної збіжності апроксимації (23) при зростанні порядку N . Зупинимось на процедурі вибору вагового параметра W дещо більш детально. Хорошим початковим значенням для константи W в області проміжного та сильного зв'язку, як це впливає з попереднього розгляду та з рисунка є, очевидно, значення $W_0 = W_{asymp} = 1/3$, яке відповідає правильній асимптотиці апроксимації (23) на нескінченності та є фактично точним асимптотичним значенням вагової функції на нескінченності.

При даному виборі константи W розрахунки дають певну практичну збіжність відносно порядку N величини енергії зв'язку, що розраховується, починаючи з деякого значення порядку апроксимації N_0 . Однак, як видно з рисунка та попереднього аналізу, при скінченних значеннях константи зв'язку λ вагова функція має дещо більші істинні значення, що перевищують величину $1/3$. У силу останнього факту, дещо варіюючи значення константи W в бік її збільшення від значення $1/3$, можна поступово досягати більшої швидкості практичної збіжності застосованої апроксимації (23) від порядку N , тобто практичної збіжності починаючи з деякого значення порядку апроксимації меншого, ніж початкове значення N_0 . Але звичайно, що більш-менш довго це покращення збіжності продовжуватись не буде й обмежиться в області проміжного та сильного зв'язку, яка розглядається, значеннями вагової константи $W \sim 0,4 \div 0,5$, близькими до її істинного значення, як це очевидно з рисунка та видно з подальших розрахунків у табл. 2 і 3. А втім вибір значення вагової константи $W \sim 0,4 \div 0,5$, тобто дещо більшим за значення $1/3$, в області λ , що розглядається, здатен додатково більш-менш суттєво прискорити збіжність величини, яка розраховується. Практичні розрахунки при цьому показують в основному однозначне визначення розрахованої величини, але при цьому все ж таки необхідно проявляти деяку обережність у розрахунках шляхом деякого збільшення, наскільки це можливо – з деяким запасом, порядку апроксимації N . Тобто однозначність розрахунку має місце при умові більш-менш достатнього збільшення порядку апроксимації N .

Зробимо ще важливе зауваження відносно “самоузгодженості” процедури вибору вагових коефіцієнтів запропонованої апроксимації як деяких незалежних параметрів. Зазначимо при цьому, що, оскільки незалежним за умови нормування (20) є фактично тільки один ваговий коефіцієнт, а практичний розрахунок при заданому фіксованому значенні константи зв'язку λ виконується залежно від порядку апроксимації N , то фактично в найбільш цікавій у першу чергу області проміжного та сильного зв'язку мова може йти про незначне варіювання одного незалежного вагового коефіцієнта поблизу його точно відомого на нескінченності асимптотичного значення $1/3$ в бік незначного збільшення значення цього коефіцієнта, як це було описано в попередньому абзаці. Самоузгодженість такої процедури не викликає сумнівів, бо ми фактично

вибираємо, або постулюємо, значення вагової функції у вигляді деякої фіксованої при кожному даному розрахунку константи, вибраної описаним вище способом, що є лише достатньо простим узагальненням традиційного підходу Паде-наближень. Тобто, залежністю вагової функції від λ та від N можна й потрібно в першому хорошому наближенні знехтувати, а вибір її просто у вигляді деякої фіксованої константи не викликає сумніву у своїй “самоузгодженості” через правильність часткових випадків, які дають традиційні апроксимації $[N/N]$, або $[N+1/N]$, або асимптотично правильну апроксимацію (22) при $w_N(\lambda) \equiv 1/3$. Слід також підкреслити, що можлива залежність вагової функції усереднення, тобто фактично вагового коефіцієнта, від параметрів λ та N має місце в тому випадку, коли запропонована апроксимація (23) мала б дати абсолютно точне значення розраховуваної величини $E_0(\lambda)$ при заданому порядку N . Але практично останнє неможливо, оскільки точне знання вагової функції $w_N(\lambda)$ означало б, очевидно, точне знання і шуканої функції $E_0(\lambda)$. Тому практично можливим є лише деяке наближене задання вагової функції з урахуванням її загаль-

них властивостей, тобто практично у вигляді деякої константи, близької до значення $1/3$.

У табл. 2 наведено розраховані запропонованим способом значення енергії $E_0(\lambda)$ основного рівня осцилятора за формулою (23) апроксимації середньозваженим геометричним діагональної $[N/N]$ і наддіагональної $[N+1/N]$ Паде-апроксимант для ряду значень константи зв'язку λ з області проміжного зв'язку $\lambda \lesssim 1$. Результати показують дуже хорошу практичну швидкість збіжності та дуже хорошу досягнуту точність розрахунків при використанні в даній області апроксимант навіть не дуже високого порядку $N \lesssim 40$. Разом з цим при зростанні константи зв'язку λ є цілком очевидним уповільнення швидкості збіжності розраховуваних значень, що є повністю очікуваним. Слід також відзначити, що практичний розрахунок Паде-апроксимант при вже знайдених коефіцієнтах A_n розкладу (2) не викликає жодних подальших труднощів з використанням того чи іншого відомого для цього способу [14]. Найбільш складним та ресурсомістким з обчислювальної точки зору є первісний розрахунок достатнього числа коефіцієнтів ряду теорії збурень (2).

Таблиця 2. Значення енергії E_0 основного рівня ангармонічного осцилятора, розраховані для різних порядків N наближення $G_N^w(\lambda)$ середньозваженим геометричним (23) головної діагональної та першої наддіагональної Паде-апроксимант з ваговою функцією (27), а також для порівняння окремо апроксимантами $[N/N]$ та $[N+1/N]$ при $\lambda=1$

N	$\lambda = 0,1$	$\lambda = 0,3$	$\lambda = 0,5$	$\lambda = 0,7$	$\lambda = 1$		
	$G_N^w(\lambda),$ $W = 0,665$	$G_N^w(\lambda),$ $W = 0,556$	$G_N^w(\lambda),$ $W = 0,533$	$G_N^w(\lambda),$ $W = 0,522$	$G_N^w(\lambda),$ $W = 0,511$	$[N/N]$	$[N+1/N]$
5	0,55914633	0,63797298	0,69608428	0,74372435	0,80351362	0,78977143	0,81688802
10	0,55914633	0,63799163	0,69617338	0,74389486	0,80374529	0,80186611	0,80554769
15	0,55914633	0,63799178	0,69617573	0,74390287	0,80376706	0,80337821	0,80413935
20	0,55914633	0,63799178	0,69617582	0,74390346	0,80377003	0,80366865	0,80386707
25	0,55914633	0,63799178	0,69617582	0,74390350	0,80377054	0,80373976	0,80379999
30	0,55914633	0,63799178	0,69617582	0,74390350	0,80377063	0,80376020	0,80378061
35	0,55914633	0,63799178	0,69617582	0,74390350	0,80377065	0,80376680	0,80377433
40	0,55914633	0,63799178	0,69617582	0,74390350	0,80377065	0,80376914	0,80377210
Ex.	0,55914633	0,63799178	0,69617582	0,74390350	0,80377065		

Примітка. Значення варіаційної припасувальної константи W підбрано емпіричним чином при кожному конкретному λ для забезпечення найкращої швидкості збіжності. Значення константи зв'язку λ – із проміжної області $0,1 \lesssim \lambda \lesssim 1$.

У табл. 3 наведено розраховані запропонованим способом значення енергії осцилятора $E_0(\lambda)$ для деяких значень константи зв'язку λ з області сильного зв'язку $\lambda \gtrsim 1$. Із наведених як приклади результатів розрахунків у табл. 2 і 3 при значеннях константи зв'язку $\lambda = 1$ і $\lambda = 20$

апроксимантами $[N/N]$, $[N+1/N]$ та їхнім середньозваженим геометричним очевидно, що точність та ефективність розрахунків з використанням апроксимації (23) суттєво, як мінімум на два-три порядки, вища, ніж із застосуванням традиційних Паде-апроксимант. І хоча ефектив-

ність розрахунків може змінюватись залежно від зміни значення константи зв'язку λ та від використаних порядків апроксимант, у наявності дуже суттєвий вигравш у точності та ефективності розрахунків з використанням апроксимації (23), який дозволяє істотно збільшити швидкість збіжності розраховуваного значення до точного результату. Тобто, апроксимація (23) мінімум на два-три порядки збільшує точність розрахунку при одному й тому ж порядку використаних апроксимант у порівнянні зі стандартним підходом.

Результати табл. 3 також показують подальше передбачуване погіршення збіжності результатів розрахунків у міру зростання значень константи зв'язку λ . Проте запропонований спосіб усереднення дає змогу проводити надійні та точні розрахунки в достатньо широкій області значень константи зв'язку $\lambda \lesssim 10 \div 20$ з використанням Паде-апроксимант не дуже високого порядку $N \sim 200 \div 500$. Також результати табл. 2 і 3 наочно ілюструють ланцюжки нерівностей (10), (11) та загальну оцінку (12).

Таблиця 3. Значення енергії E_0 основного рівня ангармонічного осцилятора, розраховані для різних порядків N наближення $G_N^w(\lambda)$ середньозваженим геометричним (23) діагональної та наддіагональної Паде-апроксимант з ваговою функцією виду (27), а також для порівняння окремо апроксимантами $[N/N]$ і $[N+1/N]$ при $\lambda = 20$

N	$\lambda = 2$	$\lambda = 5$	$\lambda = 10$	$\lambda = 15$	$\lambda = 20$		
	$G_N^w(\lambda),$ $W = 0,499$	$G_N^w(\lambda),$ $W = 0,493$	$G_N^w(\lambda),$ $W = 0,4871$	$G_N^w(\lambda),$ $W = 0,477$	$G_N^w(\lambda),$ $W = 0,4765$	$[N/N]$	$[N+1/N]$
25	0,95157048	1,22518261	1,5106301	1,71854	1,89286	1,62940	2,23166
50	0,95156847	1,22462295	1,5056456	1,70703	1,87097	1,77726	1,97963
75	0,95156847	1,22459134	1,5051043	1,70548	1,86711	1,82533	1,91412
100	0,95156847	1,22458774	1,5050052	1,70516	1,86613	1,84509	1,88953
125	0,95156847	1,22458717	1,5049816	1,70509	1,86583	1,85436	1,87852
150	0,95156847	1,22458706	1,5049751	1,70508	1,86573	1,85911	1,87304
175	0,95156847	1,22458704	1,5049732	1,70508	1,86570	1,86170	1,87010
200	0,95156847	1,22458704	1,5049726	1,70508	1,86569	1,86319	1,86844
225	0,95156847	1,22458704	1,5049724	1,70508	1,86569	1,86408	1,86745
250	0,95156847	1,22458704	1,5049724	1,70508	1,86569	1,86463	1,86685
Ex.	0,95156847	1,22458704	1,50497241	1,70508427	1,86569580		

П р и м і т к а. Значення варіаційної припасувальної константи W підбрано емпіричним чином для забезпечення найкращої швидкості збіжності. Значення константи зв'язку λ – із області сильного зв'язку $\lambda \gtrsim 1$.

5. Дослідження та розрахунки на основі раціональної апроксимації вагової функції

Таким чином, згідно з попередніми результатами, в області надсильного зв'язку $\lambda \gtrsim 25$ розрахунок енергії осцилятора $E_0(\lambda)$ безпосередньо за допомогою Паде-апроксимант стає практично неможливим унаслідок сильного погіршення швидкості збіжності їх при подальшому зростанні константи зв'язку в цій області. Однак виключно плавна та монотонна поведінка вагової функції $w_N(\lambda)$ при $\lambda \gtrsim 25$, як це видно з рисунка, дає змогу побудувати дуже ефективний спосіб розрахунку й у цій області, базуючи його на екстраполяції гладкої вагової функції в область надсильного зв'язку. Для простоти та визначеності будемо розглядати надалі вагову функцію нульового порядку $w_0(\lambda) \equiv w(\lambda)$. Якщо прийняти, що апроксимація (23) повинна дати

точне значення функції $E_0(\lambda)$, то з урахуванням елементарних виразів $[0/0] = \frac{1}{2}$, $[1/0] = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\lambda$ для Паде-апроксимант найнижчого порядку вагова функція нульового порядку повинна наступним чином виражатися через енергію зв'язку

$$w(\lambda) \equiv w_0(\lambda) = \frac{\ln(2E_0(\lambda))}{\ln\left(1 + \frac{3}{2}\lambda\right)}. \quad (28)$$

Співвідношення (28) дає простий і дуже зручний спосіб деякої регуляризації та перенормування первинної залежності $E_0(\lambda)$, як видно з рисунка. Будемо далі будувати максимально точні апроксимації функції $w(\lambda)$ (28) на відрізку $[0,25]$, де ми цю функцію можемо точно розрахувати чисельно згідно з вищенаведеним способом розрахунку функції $E_0(\lambda)$ усередненими Паде-апроксимантами і, таким чином, можемо обчис-

лити довільну кількість вузлів $\{(\lambda_i, w_i)\}$ цієї функції на даному відрізку. Ці наближення для функції $w(\lambda)$ зручно, знову ж таки, будувати у вигляді раціональних функцій

$$w(\lambda) \cong R_N^N(\lambda) = \frac{p_0 + p_1\lambda + \dots + p_N\lambda^N}{q_0 + q_1\lambda + \dots + q_N\lambda^N}, \quad (29)$$

оскільки однією з важливих властивостей раціональних функцій [27] є можливість добре наближати ними прямолінійні залежності або близькі до таких, як це має місце у випадку функції

$$R_N^N(\lambda) = w(\lambda_1) + \frac{\lambda - \lambda_1}{\rho_1(\lambda_1, \lambda_2) + \frac{\lambda - \lambda_1}{\rho_2(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) - w(\lambda_1) + \frac{\lambda - \lambda_3}{\rho_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) - \rho_1(\lambda_1, \lambda_2) + \dots}}, \quad (30)$$

де $\rho_{n-1}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ – обернені різниці [27 - 30]. Ланцюговий дріб (30), очевидно, легко може бути приведений до вигляду раціональної функції (29). Інтерполяційний метод Тіле є аналогом інтерполяційного методу Лагранжа для випадку раціональних функцій, відповідно вираз (30) приймає задані значення $\{w_i \equiv w(\lambda_i)\}_{i=1}^{2N+1}$ у заданому наборі точок $\{\lambda_i\}_{i=1}^{2N+1}$, де вузли інтерполяції λ_i обираються нами рівномірно розподіленими на відрізку $[0,25]$ ($\lambda_1 = 0, \dots, \lambda_{2N+1} = 25$). Для отримання при цьому діагонального вигляду (29) раціональної апроксимації з рівними між собою порядками поліномів у чисельнику та знаменнику необхідно обирати кількість вузлів інтерполяції Тіле, що дорівнює деякому непарному числу $2N + 1$. Слід також відзначити принципову відмінність у побудові раціональних апроксимацій

$w(\lambda)$, що має горизонтальну асимптоту $w(\lambda) = 1/3$. При виборі нормування $q_0 = 1$ перша з граничних умов (26) дає $p_0 = 1$, а другу з граничних умов (26) неважко виконати при виборі $q_N = 3p_N$, однак спеціально ми цього вимагати не будемо. Конкретним зручним способом побудови раціональних апроксимацій (29) функції $w(\lambda)$ на відрізку $[0,25]$ є інтерполяційний метод Тіле [28 - 30], згідно з яким інтерполуюча функція будується у вигляді ланцюгового дробу

(29), (30) від побудови Паде-апроксимант, яка виражається в тому, що Паде-апроксиманти є апроксимаціями максимально можливого ступеня гладкості в одній точці $\lambda = 0$, у той час як апроксимація (30) будується в деякому наборі точок-вузлів, тобто на відрізку. Підкреслимо також, що методи розрахунку відповідно до розкладу в ряд Тейлора чи згідно з Паде-апроксимаціями також є, по суті, методами екстраполяції досліджуваної функції від початкової нульової точки в бік ненульових значень незалежної змінної. Ще відзначимо, що згідно з розрахунками функція $w(\lambda)$ дійсно є вкрай повільно та плавно спадаючою функцією в області $\lambda \gtrsim 25$, а саме, її значення спадає на всьому безкінечному інтервалі $[25, \infty)$ від значення $w(25) \cong 0,380$ до $w(\infty) = 1/3 \cong 0,333$, тобто менш ніж на величину 0,05.

Таблиця 4. Значення енергії E_0 основного рівня ангармонічного осцилятора, розраховані для різних порядків N раціональної апроксимації $R_N^N(\lambda)$ (29) вагової функції нульового порядку $w_0(\lambda) \equiv w(\lambda)$ на відрізку $[0,25]$ згідно з методом раціональної інтерполяції Тіле з подальшою екстраполяцією в область надсильного зв'язку

N	$\lambda = 50$	$\lambda = 75$	$\lambda = 100$	$\lambda = 200$	$\lambda = 300$	$\lambda = 400$	$\lambda = 500$
5	2,49971345	2,85102593	3,13165311	3,93414201	4,50235276	4,95841283	5,34622947
10	2,49970877	2,85096038	3,13138440	3,93095729	4,49334204	4,94185093	5,32123909
15	2,49970877	2,85096037	3,13138417	3,93093154	4,49315649	4,94126325	5,31996170
20	2,49970877	2,85096037	3,13138416	3,93093134	4,49315276	4,94124288	5,31989769
25	2,49970877	2,85096037	3,13138416	3,93093134	4,49315269	4,94124219	5,31989452
30	2,49970877	2,85096037	3,13138416	3,93093134	4,49315269	4,94124216	5,31989437
35	2,49970877	2,85096037	3,13138416	3,93093134	4,49315269	4,94124216	5,31989436
40	2,49970877	2,85096037	3,13138416	3,93093134	4,49315269	4,94124216	5,31989436
Ex.	2,49970877	2,85096037	3,13138416	3,93093134	4,49315269	4,94124216	5,31989436

Примітка. Значення константи зв'язку λ – із області надсильного зв'язку $\lambda \gtrsim 25$.

У табл. 4 наведено розраховані запропонованим способом по функції $w(\lambda)$ значення енергії осцилятора $E_0(\lambda)$ для деяких значень константи зв'язку λ з області надсильного зв'язку $\lambda \gtrsim 25$, де підсумкові значення енергії розраховувались відповідно до елементарної формули

$$E_0(\lambda) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{3}{2} \lambda \right)^{w(\lambda)}. \quad (31)$$

Результати табл. 4 показують зручність та ефективність застосування вагової функції, тобто регуляризації вигляду (28), для розрахунків унаслідок відзначеної істотної плавності та монотонності даної функції, особливо в області надсильного зв'язку. Запропонований спосіб розрахунку дозволяє суттєво розширити область ефективних розрахунків енергії осцилятора аж до значень константи зв'язку $\lambda \lesssim 500$ і навіть більших з використанням раціональних апроксимацій (29), (30) не дуже високого порядку $N \lesssim 50$.

6. Обговорення та головні висновки

На завершення вкажемо іще на ряд важливих моментів. Відзначимо, по-перше, що в загальному випадку ряд Стілтєса може визначати не одну відповідну йому функцію. Однак відомою достатньою умовою єдиності функції Стілтєса, що відповідає цьому ряду, є критерій Карлемана [14, 15, 21] і ряд теорії збурень біквадратичного ангармонічного осцилятора, як було доведено [21], цьому критерію задовольняє. Отже, для цього випадку є справедливими єдині оцінки у вигляді нерівностей (10) - (12), тобто відповідні Паде-апроксиманти в даному випадку збігаються до одного й того ж значення, яке дає єдине значення аналізованої функції в даній точці. По-друге, нагадаємо, що дана модель квантового ангармонічного осцилятора має особливий інтерес для квантової теорії поля, оскільки вона вже сама по собі є моделлю $\lambda\phi^4$ теорії поля в одновимірному просторі-часі [1 - 4, 7]. Тому властивості даної моделі є вказівками на відповідні аналітичні властивості більш реалістичних квантово-польових теорій, тобто основні характерні властивості даної моделі можуть і повинні бути присутні в більш реалістичних теоріях поля. Зокрема, розбіжність рядів теорії збурень квантово-польових теорій давно обговорюється в літературі [1 - 4, 12, 13, 20, 31]. Таким чином, по суті, у роботі Бендера і Ву [1] було вперше розвинено методи опису фактичної сингулярної структури

деякої конкретної теорії поля. Подробиці та подальші посилання відносно моделі ангармонічного осцилятора у квантовій теорії поля можна знайти в [1 - 4, 7]. Однак при цьому особливо підкреслимо, що дана модель у постановці, яка використовується в даній роботі, є перш за все квантово-механічною моделлю. По-третє, підкреслимо, що різні методи одно- та багатополносних апроксимацій різноманітних фізичних залежностей давно та широко застосовуються в ядерній фізиці та фізиці елементарних частинок [32 - 37]. Дані методи є, по суті, деякими модифікаціями або конкретними реалізаціями загального методу Паде-наближень і дають у багатьох випадках дуже зручний і точний спосіб опису досліджуваних величин та явищ. По-четверте, зазначимо, що для одновимірного ангармонічного осцилятора існує ряд інших методів розрахунку, у тому числі непертурбативних [5, 9, 18, 38 - 41]. Однак ці методи в основному не мають достатнього ступеня загальності і їх важко застосувати до інших систем, особливо багатовимірних, на відміну від загального методу теорії збурень. У той же час суттєвими перевагами методу Паде-наближень є простота та загальність. По-п'яте, окремо відзначимо, що модель ангармонічного осцилятора є постійно актуальною та перманентно викликає значний інтерес завдяки багатьом різноманітним практичним застосуванням у різних галузях, зокрема в атомно-молекулярній фізиці та теорії твердого тіла – для опису коливань у молекулах і кристалічних решітках та для опису деяких моделей дифузійних процесів [7]. Також дана модель має важливе та помітне значення для ядерної фізики, наприклад для опису спектрів ядер та деяких інших їхніх властивостей у ряді моделей атомного ядра (див. ряд нещодавніх сучасних робіт на цю тему [44 - 47]).

Ще один цікавий та важливий момент стосується можливості застосування запропонованого методу до розрахунку енергій збуджених станів ангармонічного осцилятора. Ряд теорії збурень Релея - Шредингера для енергії $E_K(\lambda)$ будь-якого довільного K -го рівня ($K = 0, 1, 2, \dots$) біквадратичного ангармонічного осцилятора має вигляд, аналогічний виразу (2) [21, 42, 43]

$$E_K(\lambda) = K + \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^K \lambda^n, \quad (32)$$

де поведінка коефіцієнтів A_n^K цього розкладу в загальному випадку будь-яких значень K також досліджувалась Бендером та Ву в їхніх подальших роботах [42, 43]. Як результат, при великих значеннях порядку n ними було отримано таке ж

факторіальне асимптотичне зростання загальних коефіцієнтів A_n^K у міру зростання їхнього порядку, як і у формулі (6) [42, 43]

$$A_n^K \underset{n \rightarrow \infty}{\simeq} (-1)^{n+1} \frac{12^K}{K!} \sqrt{\frac{6}{\pi^3}} 3^n \Gamma\left(n + K + \frac{1}{2}\right). \quad (33)$$

Таким чином, асимптотично загальні коефіцієнти A_n^K чергуються за знаком та поводять себе в цілому аналогічно вищерозглянутим коефіцієнтам A_n . Тому у всякому разі теоретично ряд теорії збурень (32) також буде рядом Стілтєса аналогічно ряду (2), принаймні починаючи з деякого члена – як і ряд (2). Отже, і в даному випадку теоретично можна застосувати для розрахунків та розгляду вищезапропонований метод. До того ж й асимптотика рівнів енергії $E_K(\lambda)$ має вигляд, повністю аналогічний виразу (14) – $E_K(\lambda) \underset{\lambda \rightarrow \infty}{\simeq} c_K \lambda^{1/3}$ [21, 42, 43].

Підводячи підсумки, як результат, у цілому запропонований метод усереднення Паде-апроксимант у застосуванні до підсумовування розбіжного ряду теорії збурень ангармонічного осцилятора дозволяє мінімум на два-три порядки збільшити точність та ефективність розрахунків у порівнянні із традиційним способом застосування Паде-апроксимант. Останнє еквівалентно приблизно дво-трикратному прискоренню збіжності результатів розрахунків залежно від порядку N використаних Паде-апроксимант. Подальше покращення методу і виключно суттєве підвищення його ефективності та результативності можливе із застосуванням регуляризації з використанням вагової функції, як описано в розділі 5. При цьому відмінні результати застосування опису з використанням вагової функції базуються, як показує аналіз, на дуже плавному й повільному спаданні цієї функції в області силь-

ного зв'язку. Таким чином, використання запропонованого методу усереднення у вигляді середньозваженого геометричного головної діагональної та першої наддіагональної Паде-апроксимант дає суттєві теоретичні й практично-обчислювальні переваги в застосуваннях. З теоретичної точки зору побудовані апроксимації дають правильну асимптотичну поведінку на нескінченності при зростанні константи зв'язку λ , а з обчислювальної точки зору вони дуже суттєво збільшують точність та ефективність розрахунків. У підсумку істотною перевагою використання узагальненого усереднення є можливість забезпечити правильну асимптотику даної апроксимації на нескінченності, чого неможливо досягти застосуванням традиційних способів Паде-наближень. Зазначимо також, що деякі додаткові переваги та властивості запропонованих апроксимацій не були відображені в даній роботі. Зауважимо, наприклад, що використання апроксимації (23) або її часткового випадку (22) дає просту можливість побудувати зрощування розкладів у нулі та на нескінченності, тобто зрощування так званих розкладів слабого зв'язку (2) та відомого розкладу сильного зв'язку по дробових степенях константи λ , яке є узагальненням асимптотики (14). А формула (31) з використанням вагової функції вигляду (29), (30) дає можливість будувати прості ефективні апроксимації невисокого порядку на дуже широких інтервалах зміни λ . Далі запропонований метод може бути добре застосований у багатьох інших випадках, де для Паде-апроксимант мають місце оцінки у вигляді нерівностей типу (10) - (12), тобто для випадків, де ряди теорії збурень є рядами Стілтєса починаючи з деякого члена. Усі ці питання буде досліджено в майбутньому.

Дана робота виконана за темами 0117U00237 НАН України та 0117U00240 Відділення фізики та астрономії НАН України.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. C.M. Bender, T.T. Wu. Anharmonic oscillator. *Phys. Rev.* 184 (1969) 1231.
2. D.I. Kazakov, D.V. Shirkov. Asymptotic series of quantum field theory and their summation. *Fortschr. Phys.* 28 (1980) 465.
3. К. Ициксон, Ж.-Б. Зюбер. *Квантовая теория поля*. Том 2 (М.: Мир, 1984) 400 с.
4. J. Zinn-Justin. *Quantum Field Theory and Critical Phenomena* (Oxford: Clarendon Press, 2002) 1054 p.
5. F.T. Hioe, D. MacMillen, E.W. Montroll. Quantum theory of anharmonic oscillators. *Phys. Rep.* 43 (1978) 305.
6. B. Simon. Large orders and summability of eigenvalue perturbation theory: a mathematical overview. *Int. J. Quant. Chem.* 21 (1982) 3.
7. G.A. Arteca, F.M. Fernández, E.A. Castro. *Large Order Perturbation Theory and Summation Methods in Quantum Mechanics* (Berlin: Springer-Verlag, 1990) 644 p.
8. B. Simon. Fifty years of eigenvalue perturbation theory. *Bull. Am. Math. Soc.* 24 (1991) 303.
9. E.Z. Liverts, V.B. Mandelzweig, F. Tabakin. Analytic calculation of energies and wave functions of the quartic and pure quartic oscillators. *J. Math. Phys.* 47 (2006) 062109.

10. H. Ezawa, M. Saito, T. Nakamura. Notes on the Pade approximation for an anharmonic oscillator. *J. Phys. Soc. Japan* 83 (2014) 034003.
11. T. Sulejmanpasic, M. Ünsal. Aspects of perturbation theory in quantum mechanics. *Comput. Phys. Comm.* 228 (2018) 273.
12. J. Zinn-Justin. Perturbation series at large orders in quantum mechanics and field theories: application to the problem of resummation. *Phys. Rep.* 70 (1981) 109.
13. J.C. Le Guillou, J. Zinn-Justin (Eds.). *Large-Order Behaviour of Perturbation Theory* (North Holland, Amsterdam: Elsevier Science Publishers, 1990) 594 p.
14. G.A. Baker, P. Graves-Morris. *Pade Approximants*. 2-nd edition. (Cambridge: Cambridge University Press, 1996) 764 p.
15. С.М. Bender, S.A. Orszag. *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers* (New York - Berlin: Springer-Verlag, 1999) 607 p.
16. Г. Харди. *Расходящиеся ряды* (Москва: Иностранная литература, 1951) 504 с.
17. Ж.-П. Рамис. *Расходящиеся ряды и асимптотические теории* (Москва - Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002) 86 с.
18. F.T. Hioe, E.W. Montroll. Quantum theory of anharmonic oscillators. *J. Math. Phys.* 16 (1975) 1945.
19. А.В. Турбинер. Задача о спектре в квантовой механике и процедура “нелинеаризации”. *УФН* 144 (1984) 35.
20. И.М. Сулов. Расходящиеся ряды теории возмущений. *ЖЭТФ* 127 (2005) 1350.
21. B. Simon. Coupling constant analyticity for the anharmonic oscillator. *Ann. Phys.* 58 (1970) 76.
22. J.J. Loeffel et al. Pade approximants and the anharmonic oscillator. *Phys. Lett. B* 30 (1969) 656.
23. С.М. Bender, G.V. Dunne. Large-order perturbation theory for a non-Hermitian PT-symmetric Hamiltonian. *J. Math. Phys.* 40 (1999) 4616.
24. Г.Г. Харди, Дж.Е. Литтлвуд, Г. Поля. *Неравенства* (Москва: Иностранная литература, 1948) 456 с.
25. D.S. Mitrinović. *Analytic Inequalities* (Berlin: Springer-Verlag, 1970) 416 p.
26. P.S. Bullen. *Handbook of Means and Their Inequalities* (Berlin: Springer-Verlag, 2003) 566 p.
27. Р.В. Хемминг. *Численные методы* (Москва: Наука, 1972) 400 с.
28. М. Абрамовиц, И. Стиган (ред.). *Справочник по специальным функциям* (Москва: Наука, 1979) 832 с.
29. F.B. Hildebrand. *Introduction to Numerical Analysis* (New York: Dover Publications, 1987) 669 p.
30. L.M. Milne-Thomson. *The Calculus of Finite Differences* (Providence: AMS, 2000) 558 p.
31. F.J. Dyson. Divergence of perturbation theory in quantum electrodynamics. *Phys. Rev.* 85 (1952) 631.
32. M. Cini, S. Fubini, A. Stanghellini. Fixed angle dispersion relations for nucleon-nucleon scattering. *Phys. Rev.* 114 (1959) 1633.
33. W.T.H. van Oers, J.D. Seagrave. The neutron-deuteron scattering lengths. *Phys. Lett. B* 24 (1967) 562.
34. В.А. Бабенко, Н.М. Петров. Описание дублетного низкоэнергетического рассеяния нейтрона на дейтроне на основе параметров, характеризующих связанное и виртуальное состояния тритона. *Ядерная физика* 63 (2000) 1798.
35. В.А. Бабенко, Н.М. Петров. Описание рассеяния и связанного состояния в системе двух нуклонов на основе баргмановского представления S-матрицы. *Ядерная физика* 68 (2005) 244.
36. В.А. Бабенко, Н.М. Петров. О триплетных низкоэнергетических параметрах нуклон-нуклонного рассеяния. *Ядерная физика* 69 (2006) 1586.
37. В.А. Бабенко, Н.М. Петров. Р-матричный подход при потенциальном описании адрон-адронного взаимодействия. *УФЖ* 32 (1987) 971.
38. S.N. Biswas et al. Eigenvalues of λx^{2m} anharmonic oscillators. *J. Math. Phys.* 14 (1973) 1190.
39. K. Banerjee. Accurate non-perturbative solution of eigenvalue problems with application to anharmonic oscillator. *Lett. Math. Phys.* 1 (1976) 323.
40. F. Vinette, J. Čížek. Upper and lower bounds of the ground state energy of anharmonic oscillators using renormalized inner projection. *J. Math. Phys.* 32 (1991) 3392.
41. E.J. Weniger. A convergent renormalized strong coupling perturbation expansion for the ground state energy of the quartic, sextic, and octic anharmonic oscillator. *Ann. Phys.* 246 (1996) 133.
42. С.М. Bender, T.T. Wu. Large-order behavior of perturbation theory. *Phys. Rev. Lett.* 27 (1971) 461.
43. С.М. Bender, T.T. Wu. Anharmonic oscillator. II. A study of perturbation theory in large order. *Phys. Rev. D* 7 (1973) 1620.
44. G. Lévai, J.M. Arias. Search for critical-point nuclei in terms of the sextic oscillator. *Phys. Rev. C* 81 (2010) 044304.
45. A.A. Raduta, P. Buganu. Application of the sextic oscillator with a centrifugal barrier and the spheroidal equation for some X(5) candidate nuclei. *J. Phys. G* 40 (2013) 025108.
46. R. Budaca. Quartic oscillator potential in the γ -rigid regime of the collective geometrical model. *Eur. Phys. J. A* 50 (2014) 87.
47. М.М. Хаммад et al. Critical potentials and fluctuations phenomena with quartic, sextic, and octic anharmonic oscillator potentials. *Nucl. Phys. A* 1004 (2020) 122036.

V. A. Babenko*, N. M. Petrov

Bogolyubov Institute for Theoretical Physics, National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, Ukraine

*Corresponding author: pet2@ukr.net

ON THE QUANTUM ANHARMONIC OSCILLATOR AND PADÉ APPROXIMATIONS

For the quantum quartic anharmonic oscillator with the Hamiltonian $H = \frac{1}{2}(p^2 + x^2) + \lambda x^4$, which is one of the traditional quantum-mechanical and quantum-field-theory models, we study summation of its factorially divergent perturbation series by the proposed method of averaging of the corresponding Padé approximants. Thus, for the first time, we are able to construct the Padé-type approximations that possess correct asymptotic behaviour at infinity with a rise of the coupling constant λ . The approach gives very essential theoretical and applicatory-computational advantages in applications of the given method. We also study convergence of the applied approximations and calculate by the proposed method the ground state energy $E_0(\lambda)$ of the anharmonic oscillator for a wide range of variation of the coupling constant λ .

Keywords: anharmonic oscillator, quantum field theory, perturbation theory, Padé approximants.

REFERENCES

1. C.M. Bender, T.T. Wu. Anharmonic oscillator. *Phys. Rev.* 184 (1969) 1231.
2. D.I. Kazakov, D.V. Shirkov. Asymptotic series of quantum field theory and their summation. *Fortschr. Phys.* 28 (1980) 465.
3. C. Itzykson, J.-B. Zuber. *Quantum Field Theory* (New York: McGraw-Hill, 1980) 705 p.
4. J. Zinn-Justin. *Quantum Field Theory and Critical Phenomena* (Oxford: Clarendon Press, 2002) 1054 p.
5. F.T. Hioe, D. MacMillen, E.W. Montroll. Quantum theory of anharmonic oscillators. *Phys. Rep.* 43 (1978) 305.
6. B. Simon. Large orders and summability of eigenvalue perturbation theory: a mathematical overview. *Int. J. Quant. Chem.* 21 (1982) 3.
7. G.A. Artega, F.M. Fernández, E.A. Castro. *Large Order Perturbation Theory and Summation Methods in Quantum Mechanics* (Berlin: Springer-Verlag, 1990) 644 p.
8. B. Simon. Fifty years of eigenvalue perturbation theory. *Bull. Am. Math. Soc.* 24 (1991) 303.
9. E.Z. Liverts, V.B. Mandelzweig, F. Tabakin. Analytic calculation of energies and wave functions of the quartic and pure quartic oscillators. *J. Math. Phys.* 47 (2006) 062109.
10. H. Ezawa, M. Saito, T. Nakamura. Notes on the Pade approximation for an anharmonic oscillator. *J. Phys. Soc. Japan* 83 (2014) 034003.
11. T. Sulejmanpasic, M. Ünsal. Aspects of perturbation theory in quantum mechanics. *Comput. Phys. Comm.* 228 (2018) 273.
12. J. Zinn-Justin. Perturbation series at large orders in quantum mechanics and field theories: application to the problem of resummation. *Phys. Rep.* 70 (1981) 109.
13. J.C. Le Guillou, J. Zinn-Justin (Eds.). *Large-Order Behaviour of Perturbation Theory* (North Holland, Amsterdam: Elsevier Science Publishers, 1990) 594 p.
14. G.A. Baker, P. Graves-Morris. *Pade Approximants*. 2nd ed. (Cambridge: Cambridge University Press, 1996) 764 p.
15. C.M. Bender, S.A. Orszag. *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers* (New York - Berlin: Springer-Verlag, 1999) 607 p.
16. G.H. Hardy. *Divergent Series* (Oxford: Clarendon Press, 1949) 396 p.
17. J.P. Ramis. *Séries Divergentes et Développements Asymptotiques* (Dijon: Université de Dijon, 1993) 101 p.
18. F.T. Hioe, E.W. Montroll. Quantum theory of anharmonic oscillators. *J. Math. Phys.* 16 (1975) 1945.
19. A.V. Turbiner. The eigenvalue spectrum in quantum mechanics and the nonlinearization procedure. *Sov. Phys. Usp.* 27 (1984) 668.
20. I.M. Suslov. Divergent perturbation series. *JETP* 100 (2005) 1188.
21. B. Simon. Coupling constant analyticity for the anharmonic oscillator. *Ann. Phys.* 58 (1970) 76.
22. J.J. Loeffel et al. Pade approximants and the anharmonic oscillator. *Phys. Lett. B* 30 (1969) 656.
23. C.M. Bender, G.V. Dunne. Large-order perturbation theory for a non-Hermitian PT-symmetric Hamiltonian. *J. Math. Phys.* 40 (1999) 4616.
24. G.H. Hardy, J.E. Littlewood, G. Pólya. *Inequalities* (Cambridge: Cambridge University Press, 1934) 338 p.
25. D.S. Mitrinović. *Analytic Inequalities* (Berlin: Springer-Verlag, 1970) 416 p.
26. P.S. Bullen. *Handbook of Means and Their Inequalities* (Berlin: Springer-Verlag, 2003) 566 p.
27. R.W. Hamming. *Numerical Methods for Scientists and Engineers* (New York: McGraw-Hill, 1962) 411 p.
28. M. Abramowitz, I.A. Stegun (Eds.). *Handbook of Mathematical Functions* (Washington, D.C.: National Bureau of Standards, 1964) 1046 p.
29. F.B. Hildebrand. *Introduction to Numerical Analysis* (New York: Dover Publications, 1987) 669 p.
30. L.M. Milne-Thomson. *The Calculus of Finite Differences* (Providence: AMS, 2000) 558 p.
31. F.J. Dyson. Divergence of perturbation theory in quantum electrodynamics. *Phys. Rev.* 85 (1952) 631.

32. M. Cini, S. Fubini, A. Stanghellini. Fixed angle dispersion relations for nucleon-nucleon scattering. *Phys. Rev.* **114** (1959) 1633.
33. W.T.H. van Oers, J.D. Seagrave. The neutron-deuteron scattering lengths. *Phys. Lett. B* **24** (1967) 562.
34. V.A. Babenko, N.M. Petrov. Description of the low-energy doublet neutron-deuteron scattering in terms of parameters characterizing bound and virtual triton states. *Phys. At. Nucl.* **63** (2000) 1709.
35. V.A. Babenko, N.M. Petrov. Description of scattering and of a bound state in the two-nucleon system on the basis of the Bargmann representation of the S-matrix. *Phys. At. Nucl.* **68** (2005) 219.
36. V.A. Babenko, N.M. Petrov. On Triplet Low-Energy Parameters of Nucleon-Nucleon Scattering. *Phys. At. Nucl.* **69** (2006) 1552.
37. V.A. Babenko, N.M. Petrov. The P-matrix approach in a potential description of hadron-hadron interaction. *Ukr. J. Phys.* **32** (1987) 971. (Rus)
38. S.N. Biswas et al. Eigenvalues of $\lambda\chi^{2m}$ anharmonic oscillators. *J. Math. Phys.* **14** (1973) 1190.
39. K. Banerjee. Accurate non-perturbative solution of eigenvalue problems with application to anharmonic oscillator. *Lett. Math. Phys.* **1** (1976) 323.
40. F. Vinette, J. Čížek. Upper and lower bounds of the ground state energy of anharmonic oscillators using renormalized inner projection. *J. Math. Phys.* **32** (1991) 3392.
41. E.J. Weniger. A convergent renormalized strong coupling perturbation expansion for the ground state energy of the quartic, sextic, and octic anharmonic oscillator. *Ann. Phys.* **246** (1996) 133.
42. C.M. Bender, T.T. Wu. Large-order behavior of perturbation theory. *Phys. Rev. Lett.* **27** (1971) 461.
43. C.M. Bender, T.T. Wu. Anharmonic oscillator. II. A study of perturbation theory in large order. *Phys. Rev. D* **7** (1973) 1620.
44. G. Lévai, J.M. Arias. Search for critical-point nuclei in terms of the sextic oscillator. *Phys. Rev. C* **81** (2010) 044304.
45. A.A. Raduta, P. Buganu. Application of the sextic oscillator with a centrifugal barrier and the spheroidal equation for some X(5) candidate nuclei. *J. Phys. G* **40** (2013) 025108.
46. R. Budaca. Quartic oscillator potential in the γ -rigid regime of the collective geometrical model. *Eur. Phys. J. A* **50** (2014) 87.
47. M.M. Hammad et al. Critical potentials and fluctuations phenomena with quartic, sextic, and octic anharmonic oscillator potentials. *Nucl. Phys. A* **1004** (2020) 122036.

Надійшла/Received 04.11.2020