В. А. Бабенко*, Н. М. Петров

Інститут теоретичної фізики ім. М. М. Боголюбова НАН України, Київ, Україна

*Відповідальний автор: pet2@ukr.net

ПРО КВАНТОВИЙ АНГАРМОНІЧНИЙ ОСЦИЛЯТОР ТА АПРОКСИМАЦІЇ ПАДЕ

Для квантового біквадратичного ангармонічного осцилятора з гамільтоніаном $H = \frac{1}{2}\left(p^2 + x^2\right) + \lambda x^4$, який є однією з традиційних моделей квантової механіки та квантової теорії поля, вивчається підсумовування факторіально розбіжного ряду теорії збурень на основі запропонованого методу усереднення відповідних даному ряду Паде-апроксимант. Уперше сконструйовано апроксимації типу Паде, які мають правильну асимптотику на нескінченності при зростанні константи зв'язку λ, що дає істотні теоретичні та практично-обчислювальні переваги в застосуваннях даного методу. Вивчено збіжність застосованих апроксимацій та розраховано запропонованим методом значення енергії $E_0(\lambda)$ основного стану ангармонічного осцилятора в широкій області зміни константи зв'язку λ.

Ключові слова: ангармонічний осцилятор, квантова теорія поля, теорія збурень, Паде-апроксиманти.

V. A. Babenko*, N. M. Petrov

Bogolyubov Institute for Theoretical Physics, National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, Ukraine

*Corresponding author: pet2@ukr.net

ON THE QUANTUM ANHARMONIC OSCILLATOR AND PADÉ APPROXIMATIONS

For the quantum quartic anharmonic oscillator with the Hamiltonian $H = \frac{1}{2}\left(p^2 + x^2\right) + \lambda x^4$, which is one of the traditional quantum-mechanical and quantum-field-theory models, we study summation of its factorially divergent perturbation series by the proposed method of averaging of the corresponding Padé approximants. Thus, for the first time, we are able to construct the Padé-type approximations that possess correct asymptotic behaviour at infinity with a rise of the coupling constant λ. The approach gives very essential theoretical and applicatory-computational advantages in applications of the given method. We also study convergence of the applied approximations and calculate by the proposed method the ground state energy $E_0(\lambda)$ of the anharmonic oscillator for a wide range of variation of the coupling constant λ.

Keywords: anharmonic oscillator, quantum field theory, perturbation theory, Padé approximants.

REFERENCES

1. C.M. Bender, T.T. Wu. Anharmonic oscillator. Phys. Rev. 184 (1969) 1231.
2. D.I. Kazakov, D.V. Shirkov. Asymptotic series of quantum field theory and their summation. Fortschr. Phys. 28 (1980) 465.
3. C. Itzykson, J.-B. Zuber. *Quantum Field Theory* (New York: McGraw-Hill, 1980) 705 p.
4. J. Zinn-Justin. *Quantum Field Theory and Critical Phenomena* (Oxford: Clarendon Press, 2002) 1054 p.
5. F.T. Hioe, D. MacMillen, E.W. Montroll. Quantum theory of anharmonic oscillators. Phys. Rep. 43 (1978) 305.
6. B. Simon. Large orders and summability of eigenvalue perturbation theory: a mathematical overview. Int. J. Quant. Chem. 21 (1982) 3.
7. G.A. Arteca, F.M. Fernández, E.A. Castro. *Large Order Perturbation Theory and Summation Methods in Quantum Mechanics* (Berlin: Springer-Verlag, 1990) 644 p.
8. B. Simon. Fifty years of eigenvalue perturbation theory. Bull. Am. Math. Soc. 24 (1991) 303.
9. E.Z. Liverts, V.B. Mandelzweig, F. Tabakin. Analytic calculation of energies and wave functions of the quartic and pure quartic oscillators. J. Math. Phys. 47 (2006) 062109.
10. H. Ezawa, M. Saito, T. Nakamura. Notes on the Pade approximation for an anharmonic oscillator. J. Phys. Soc. Japan 83 (2014) 034003.
11. T. Sulejmanpasic, M. Ünsal. Aspects of perturbation theory in quantum mechanics. Comput. Phys. Comm. 228 (2018) 273.
12. J. Zinn-Justin. Perturbation series at large orders in quantum mechanics and field theories: application to the problem of resummation. Phys. Rep. 70 (1981) 109.
13. J.C. Le Guillou, J. Zinn-Justin (Eds.). *Large-Order Behaviour of Perturbation Theory* (North Holland, Amsterdam: Elsevier Science Publishers, 1990) 594 p.

14. G.A. Baker, P. Graves-Morris. *Pade Approximants.* 2nd ed. (Cambridge: Cambridge University Press, 1996) 764 p.
15. C.M. Bender, S.A. Orszag. *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers* (New York - Berlin: Springer-Verlag, 1999) 607 p.
16. G.H. Hardy. *Divergent Series* (Oxford: Clarendon Press, 1949) 396 p.
17. J.P. Ramis. *Séries Divergentes et Développements Asymptotiques* (Dijon: Université de Dijon, 1993) 101 p.
18. F.T. Hioe, E.W. Montroll. Quantum theory of anharmonic oscillators. J. Math. Phys. 16 (1975) 1945.
19. A.V. Turbiner. The eigenvalue spectrum in quantum mechanics and the nonlinearization procedure. Sov. Phys. Usp. 27 (1984) 668.
20. I.M. Suslov. Divergent perturbation series. JETP 100 (2005) 1188.
21. B. Simon. Coupling constant analiticity for the anharmonic oscillator. Ann. Phys. 58 (1970) 76.
22. J.J. Loeffel et al. Pade approximants and the anharmonic oscillator. Phys. Lett. B 30 (1969) 656.
23. C.M. Bender, G.V. Dunne. Large-order perturbation theory for a non-Hermitian PT-symmetric Hamiltonian. J. Math. Phys. 40 (1999) 4616.
24. G.H. Hardy, J.E. Littlewood, G. Pólya. *Inequalities* (Cambridge: Cambridge University Press, 1934) 338 p.
25. D.S. Mitrinović. *Analytic Inequalities* (Berlin: Springer-Verlag, 1970) 416 p.
26. P.S. Bullen. *Handbook of Means and Their Inequalities* (Berlin: Springer-Verlag, 2003) 566 p.
27. R.W. Hamming. *Numerical Methods for Scientists and Engineers* (New York: McGraw-Hill, 1962) 411 p.
28. M. Abramowitz, I.A. Stegun (Eds.). *Handbook of Mathematical Functions* (Washington, D.C.: National Bureau of Standards, 1964) 1046 p.
29. F.B. Hildebrand. *Introduction to Numerical Analysis* (New York: Dover Publications, 1987) 669 p.
30. L.M. Milne-Thomson. *The Calculus of Finite Differences* (Providence: AMS, 2000) 558 p.
31. F.J. Dyson. Divergence of perturbation theory in quantum electrodynamics. Phys. Rev. 85 (1952) 631.
32. M. Cini, S. Fubini, A. Stanghellini. Fixed angle dispersion relations for nucleon-nucleon scattering. Phys. Rev. 114 (1959) 1633.
33. W.T.H. van Oers, J.D. Seagrave. The neutron-deuteron scattering lengths. Phys. Lett. B 24 (1967) 562.
34. V.A. Babenko, N.M. Petrov. Description of the low-energy doublet neutron-deuteron scattering in terms of parameters characterizing bound and virtual triton states. Phys. At. Nucl. 63 (2000) 1709.
35. V.A. Babenko, N.M. Petrov. Description of scattering and of a bound state in the two-nucleon system on the basis of the Bargmann representation of the S-matrix. Phys. At. Nucl. 68 (2005) 219.
36. V.A. Babenko, N.M. Petrov. On Triplet Low-Energy Parameters of Nucleon-Nucleon Scattering. Phys. At. Nucl. 69 (2006) 1552.
37. V.A. Babenko, N.M. Petrov. The P-matrix approach in a potential description of hadron-hadron interaction. Ukr. J. Phys. 32 (1987) 971. (Rus)
38. S.N. Biswas et al. Eigenvalues of λx^{2m} anharmonic oscillators. J. Math. Phys. 14 (1973) 1190.
39. K. Banerjee. Accurate non-perturbative solution of eigenvalue problems with application to anharmonic oscillator. Lett. Math. Phys. 1 (1976) 323.
40. F. Vinette, J. Čížek. Upper and lower bounds of the ground state energy of anharmonic oscillators using renormalized inner projection. J. Math. Phys. 32 (1991) 3392.
41. E.J. Weniger. A convergent renormalized strong coupling perturbation expansion for the ground state energy of the quartic, sextic, and octic anharmonic oscillator. Ann. Phys. 246 (1996) 133.
42. C.M. Bender, T.T. Wu. Large-order behavior of perturbation theory. Phys. Rev. Lett. 27 (1971) 461.
43. C.M. Bender, T.T. Wu. Anharmonic oscillator. II. A study of perturbation theory in large order. Phys. Rev. D 7 (1973) 1620.
44. G. Lévai, J.M. Arias. Search for critical-point nuclei in terms of the sextic oscillator. Phys. Rev. C 81 (2010) 044304.
45. A.A. Raduta, P. Buganu. Application of the sextic oscillator with a centrifugal barrier and the spheroidal equation for some X(5) candidate nuclei. J. Phys. G 40 (2013) 025108.
46. R. Budaca. Quartic oscillator potential in the γ-rigid regime of the collective geometrical model. Eur. Phys. J. A 50 (2014) 87.
47. M.M. Hammad et al. Critical potentials and fluctuations phenomena with quartic, sextic, and octic anharmonic oscillator potentials. Nucl. Phys. A 1004 (2020) 122036.

Надійшла/Received 04.11.2020