

А. М. Соколов*

Институт ядерных исследований НАН Украины, Киев, Украина

*Ответственный автор: amsklv@i.ua

**УЧЕТ АППАРАТНОЙ ФУНКЦИИ ПРИ РЕГИСТРАЦИИ ОПЫТНЫХ ДАННЫХ:
ОСОБЕННОСТИ ВЫБОРА ПАРАМЕТРА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ПО КРИТЕРИЮ L-КРИВОЙ
ПРИ ДЕКОНВОЛЮЦИИ СПЕКТРА**

В рамках задачи деконволюции спектра рассмотрен вариант выбора параметра регуляризации по критерию L-кривой, основанный на перемещении по точкам графика L-кривой. Проведен анализ зависимостей, на основе которых строится L-кривая. Сама L-кривая трактуется как график сложной функции нормы регуляризованного решения от невязки, отмечено ее сходство с графиком невязки.

Ключевые слова: аппаратная функция, спектр, метод регуляризации, критерий L-кривой.

**1. Постановка задачи.
Анализ составляющих
функционала Тихонова**

Выбор параметра регуляризации – важный и до сих пор актуальный этап в методе регуляризации решения некорректно поставленных задач, к которым относятся многие обратные задачи, в частности задача деконволюции спектра, т.е. устранения искажающего влияния аппаратуры при регистрации экспериментальных спектрометрических данных. Задача сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода

$$\int_a^b K(t,s)x(s)ds = y_\delta(t), \quad t \in [c,d],$$

(в операторном виде $Kx = y_\delta$), (1)

где $x(s)$ – интересующая нас исходная зависимость (неискаженный спектр); $y_\delta(t)$ – полученная в результате измерений зависимость (зарегистрированный спектр); δ -уровень ее погрешности; $K(t, s)$ – аппаратная функция, предполагаемая заданной. Например, пусть аппаратная функция $K(t, s) \equiv K(t - s)$ имеет вид, показанный на рис. 1, входной сигнал $x(s)$ показан на рис. 2. Тогда соответствующий им выходной сигнал $y(t)$ (в предположении, что нет ошибок измерений, т.е. получены точные данные) будет иметь вид, как на рис. 3. На практике вместо $y(t)$ бывает получена $y_\delta(t)$ – правая часть с погрешностью, уровень которой δ :

$$\|y(t) - y_\delta(t)\|_{L_2} \equiv \left(\int_c^d (y(t) - y_\delta(t))^2 dt \right)^{1/2} \leq \delta.$$

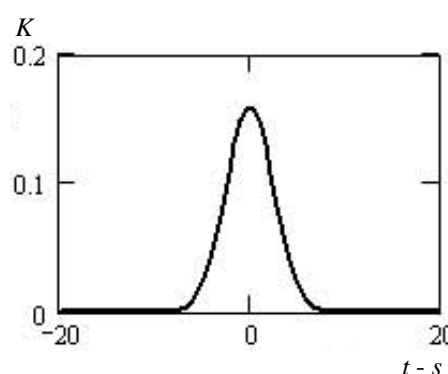


Рис. 1. Аппаратная функция $K(t - s)$.

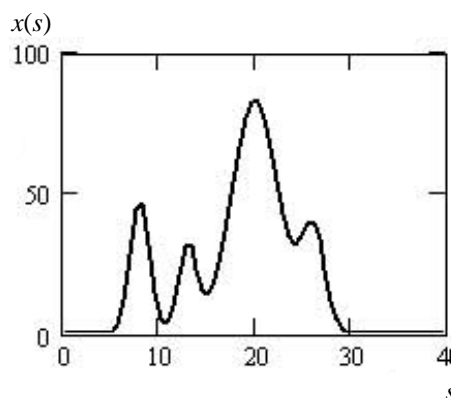


Рис. 2. Модельный входной сигнал $x(s)$.

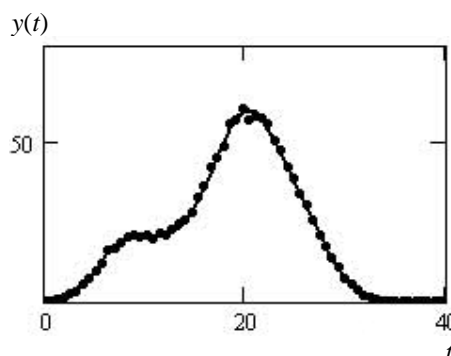


Рис. 3. Выходной сигнал $y(t)$:
(—) - без «шума»; (···) - с «шумом».

По этой причине реальный выходной сигнал выглядит, как на рис. 3. В методе регуляризации [1, 2] решение уравнения (1) с правой частью $y_{\delta}(t)$ заменяется задачей на минимум функционала Тихонова

$$\arg \min \left(\|Kx - y_{\delta}\|_{L_2}^2 + \alpha \|x\|_{W_2^1}^2 \right), \quad (2)$$

а соответствующее уравнение Эйлера получается в виде

$$K^*Kx + \alpha(x - x'') = K^*y_{\delta}. \quad (3)$$

(Норма W_2^1 в уравнении (2) определяется, как в уравнении (8); K^* в уравнении (3) – оператор, сопряженный K ; x'' – 2-я производная функции x). От выбора параметра регуляризации (ПР) α зависит устойчивость решения задачи в форме (2) и (3) и его отклонение от точного решения исходной задачи (1). Поэтому этому выбору уделяется особое внимание. Критерий L-кривой, который мы рассмотрим, один из популярных вариантов такого выбора. Для численного решения задачи, следуя [3, 4], с помощью дискретизации с шагом h перейдем к конечномерной аппроксимации задачи (1)

$$Ax = y, \quad (4)$$

сохраняющей ее основные свойства, в том числе неустойчивость к погрешности в правой части. Интегральный оператор в формуле (1) превратится в матрицу A , функции – в векторы x и y .

После дискретизации уравнение (3) преобразуется в систему линейных уравнений

$$(A^T \cdot A)x + \alpha(E - C)x = (A^T)y_{\delta}, \quad (5)$$

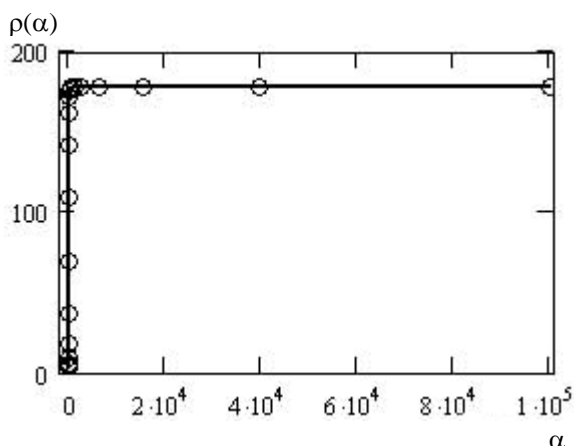


Рис. 4. Функция невязки $\rho(\alpha)$ (обычный масштаб).

Посмотрим, как в конкретном случае проявляются свойства этих функций. На рис. 4 и 5 показано поведение функций для случая интегрального оператора с ядром, как на рис. 1, с мо-

где E – единичная матрица; C – трехдиагональная матрица вида

$$C = \frac{1}{h^2} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Из формулы (5) для решения регуляризованной задачи получим

$$x_{\alpha} = (A^T \cdot A + \alpha(E - C))^{-1} A^T \cdot y_{\delta}. \quad (6)$$

Введем параметрические функционалы (функции от параметра α)

$$\rho(\alpha) = \|Kx_{\alpha} - y_{\delta}\|_{L_2}, \quad (7)$$

$$\gamma(\alpha) = \|x_{\alpha}\|_{W_2^1} \equiv \left(\|x_{\alpha}\|_{L_2}^2 + \|x'_{\alpha}\|_{L_2}^2 \right)^{1/2}, \quad (8)$$

$$\varphi(\alpha) = \|Kx_{\alpha} - y_{\delta}\|_{L_2}^2 + \alpha \cdot \|x_{\alpha}\|_{W_2^1}^2. \quad (9)$$

Основные их свойства хорошо изучены [2]. В частности, все три функции строго монотонны. Функции $\rho(\alpha)$ и $\varphi(\alpha)$ (невязка и функционал Тихонова) возрастают, норма регуляризованного решения $\gamma(\alpha)$ убывает. С учетом выражения (6) для x_{α} введенные функционалы примут форму, по которой можно вести реальные вычисления:

$$\rho(\alpha) = \sqrt{h} \left\| A \left[(A^T \cdot A + \alpha(E - C))^{-1} A^T \cdot y_{\delta} \right] - y_{\delta} \right\|, \quad (10)$$

$$\gamma(\alpha) = \sqrt{h} \left\| (E - C)(A^T \cdot A + \alpha(E - C))^{-1} A^T \cdot y_{\delta} \right\|, \quad (11)$$

$$\varphi(\alpha) = \rho(\alpha)^2 + \alpha \cdot \gamma(\alpha)^2. \quad (12)$$

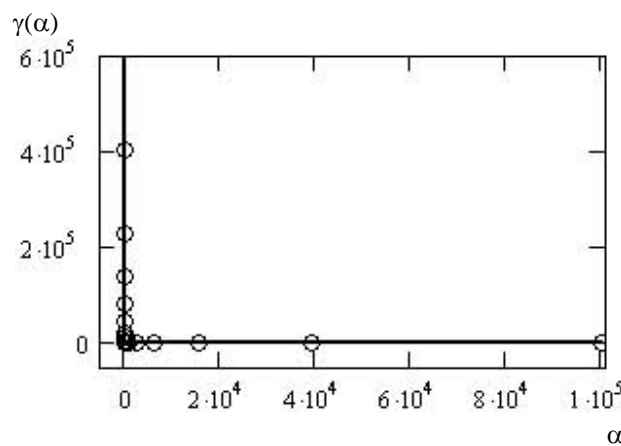


Рис. 5. Функция нормы $\gamma(\alpha)$ (обычный масштаб).

дельным входным сигналом, как на рис. 2, и с правой частью, как на рис. 3. Сетка по аргументу α взята в виде $\alpha_k = 10^{p_0 + \Delta k}$, $p_0 = -12$, $\Delta = 17/44$, $k = 0, \dots, 44$. Кружки (точки) на графиках изо-

бражают значения соответствующих сеточных функций. При этом точки графиков расположены очень неравномерно. На рис. 4 в области начала координат сгруппировались точки под номерами 0 - 26, в области угла произошло наложение точек 35 - 39. На рис. 5 в области угла находятся точки 8 - 39. На рис. 4 и 5 видно, что изменение величины рассматриваемых зависимостей про-

исходит в узкой области малых значений ПР. При этом наблюдается большой диапазон изменения величин. Поэтому обычно при изображении этих функций на графике применяется логарифмический масштаб по обоим осям. Графики зависимостей $\rho(\alpha)$ и $\gamma(\alpha)$ при этом изменятся и будут выглядеть, как на рис. 6 и 7.

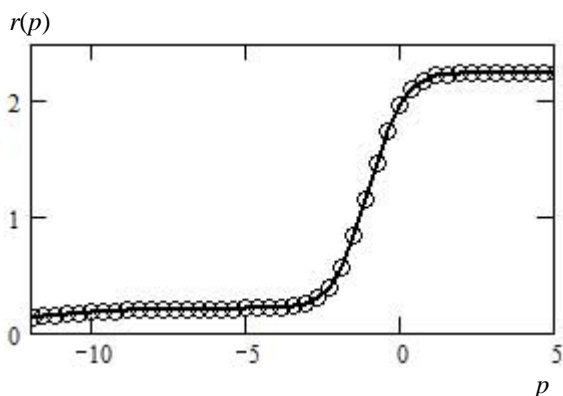


Рис. 6. Невязка $r(p)$ после замены переменных (совпадает с графиком $\rho(\alpha)$ в лог-лог масштабе).

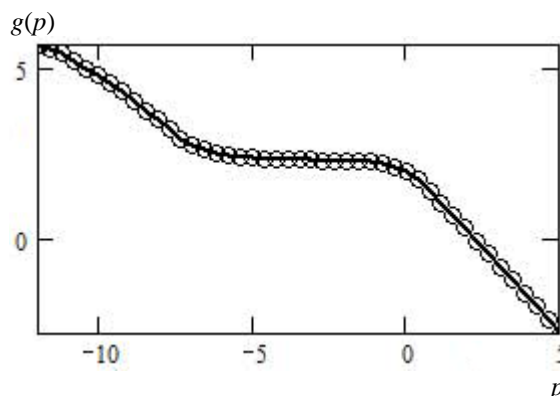


Рис. 7. Норма $g(p)$ после замены переменных (совпадает с графиком $\gamma(\alpha)$ в лог-лог масштабе).

Какие величины мы реально видим на этих графиках? Применение логарифмического масштаба по оси α фактически означает, что мы перешли к новой переменной p , связанной с α отношением $\alpha = 10^p$ или, иначе, $p = \log_{10}(\alpha)$:

$$\gamma(p) = \|x_{\alpha(p)}\| = \sqrt{h} \|(E - C)(A^T \cdot A + 10^p (E - C))^{-1} A^T \cdot y_\delta\|. \quad (13)$$

Переход к логарифмическому масштабу по оси ординат для r или γ означает для них замену переменной вида $\rho_{new} = \log_{10}(\rho_{old})$ и $\gamma_{new} = \log_{10}(\gamma_{old})$:

$$r(p) = \log_{10} \|A \cdot x_{\alpha(p)} - y_\delta\| = \log_{10} \left(\sqrt{h} \left\| A \left[(A^T \cdot A + 10^p (E - C))^{-1} A^T \cdot y_\delta \right] - y_\delta \right\| \right), \quad (14)$$

$$g(p) = \log_{10} \|x_{\alpha(p)}\| = \log_{10} \left(\sqrt{h} \left\| (E - C)(A^T \cdot A + 10^p (E - C))^{-1} A^T \cdot y_\delta \right\| \right). \quad (15)$$

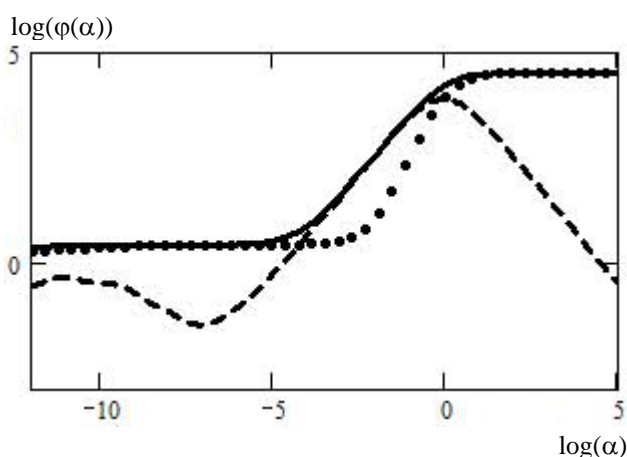


Рис. 8. Функционал $\phi(\alpha)$ (—) и его составляющие: $\rho(\alpha)^2$ - (···), $\alpha \cdot \gamma(\alpha)^2$ - (---).

На рис. 6 и 7 величины приведены именно после такой замены переменных. Обзор поведения функций (7) - (9) закончим графиком функционала Тихонова на регуляризованном решении

$\phi(\alpha)$ (рис. 8). Его вид объясняется поведением его составляющих. (Для всех зависимостей, изображенных на рис. 8, также произведена замена переменных, эквивалентная переходу к лог-лог масштабу.) Для критерия L-кривой особенно важно поведение зависимостей (7) и (8), изображенных на рис. 6 и 7.

2. Выбор параметра регуляризации по методу L-кривой

Методы выбора параметра регуляризации можно разделить на две группы. К первой, предполагающей известным уровень δ погрешности в данных, относится, например, выбор по принципу невязки (выбор из условия: невязка уравнения (1) на регуляризованном решении такая же, как на точном решении, т.е. равна δ).

Привлекательный своей графической наглядностью метод L-кривой [5, 6] выбора параметра

регуляризации относится к группе методов, не использующих сведений об уровне и характере погрешности в данных.

Возьмем функцию $g(p)$ нормы регуляризованного решения, график которой приведен на рис. 7, и сделаем еще одну замену переменной – $p = p(r)$, пользуясь тем, что функция невязки $r(p)$ строго возрастающая и может быть обращена. Таким образом, мы получим сложную функцию нормы от невязки. При этом график нормы преобразуется и примет вид, показанный на рис. 9.

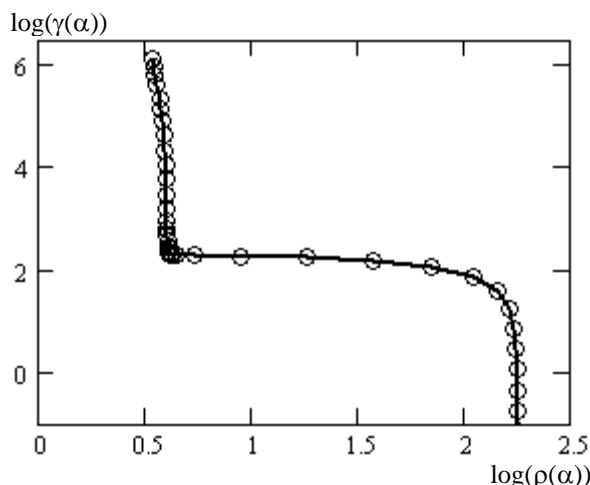


Рис. 9. Типичная форма L-кривой, заданной в параметрическом виде. Может трактоваться как функция нормы от невязки в лог-лог масштабе.

Получившаяся из кривой графика нормы кривая на рис. 9 сохраняет с ней определенное сходство. Видим, что левая часть кривой на рис. 7 сжалась в узкий участок на рис. 9, из наклонной она стала почти вертикальной. Середина растянулась в большой, близкий к горизонтальному, участок. Правая часть сжалась в почти вертикальный участок. Получившаяся из графика нормы кривая на рис. 9 – это и есть L-кривая. Она имеет (обычно) характерный изгиб, «угол», когда почти вертикальная часть кривой переходит в почти горизонтальный участок. Этому углу соответствуют те значения параметра p (соответственно и параметра α), для которых заканчивается участок малых значений невязки и начинается ее заметный рост.

Сгустившиеся точки вблизи угла L-кривой – это точки, которые лежали слева на пологой части графика нормы и сжались в узкий вертикальный участок. На горизонтальной части L-кривой лежат «бывшие» точки графика нормы, как правило, небольшого участка справа той же пологой части. Точки лежат редко, так как для этого участка произошло растяжение графика. Границы между участками, на которых точки графика нормы будут сжиматься или растягиваться,

определяются поведением функции невязки, при этом эффект здесь относительный. Там, где производная этой функции меньше некоторого среднего значения, произойдет сжатие там, где больше – растяжение. На рис. 10, где приведены одновременно графики нормы и невязки, вертикальная черта отмечает границу, где функция невязки начинает заметный рост.

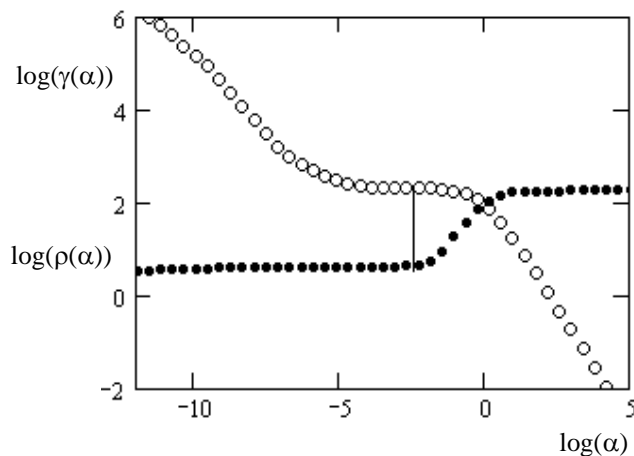


Рис. 10. Функции невязки ($r(\alpha)$ – (····)) и нормы ($g(\alpha)$ – (ooo)). Приведены в лог-лог масштабе.

Точки графика нормы, лежащие левее этой границы, при замене переменной, которая переведет ее в L-кривую, сожмутся влево, лежащие чуть правее – растянутся в горизонтальный участок. Видно, что именно эта граница определяет положение точек в области угла L-кривой и, заметим, она близка к значению ПР, получаемому по принципу невязки [2]. Зависимость между нормой g и невязкой r взаимно однозначная. Поэтому L-кривая на рис. 9 представляет собой не только график прямой, но и обратной функции, т.е. функции невязки от нормы. Для более привычного положения осей графика достаточно повернуть рис. 9 на 90° против часовой стрелки. Мы увидим график функции $r(g)$, похожий на график $r(p)$ на рис. 6 и получающийся из него после соответствующей замены переменной $p = p(g)$. Таким образом, L-кривая имеет сильное сходство с графиком невязки (с учетом поворота).

Критерий L-кривой предлагает выбирать значение параметра регуляризации, соответствующее углу L-кривой. После проведенного анализа ясно, что при этом придется искать точку, представляющую угол L-кривой, среди группы точек, сжавшихся практически с наложением друг на друга в области угла.

3. Выбор точки, представляющей угол L-кривой

Для поиска точки, представляющей угол L-кривой, предложено несколько подходов [5, 6].

В традиционном подходе вычисляют кривизну L-кривой и ищут точку, соответствующую максимальной кривизне. При этом приходится проводить громоздкие выкладки. Немного упрощает ситуацию переход к анализу сплайнов, построенных по точкам графика L-кривой. Он связан с дополнительными вычислительными погрешностями. Мы предлагаем использовать более простой способ выбора точки, которая может представлять угол L-кривой. Идеино он близок к подходу в работе [7] и основан на анализе собственно самих точек графика L-кривой.

Для анализа поведения графиков сеточных функций можно использовать удобное средство, сходное с оценкой второй производной и тоже характеризующее кривизну кривой. Попробуем оценить, как сильно и в какую сторону изгибается кривая графика при движении вдоль этой кривой.

Точкам графика сеточной функции сопоставим векторы с соответствующими координатами $\mathbf{p}_i = (x_i, y_i)$, $i = 0, \dots, N$ и рассмотрим систему векторов $\mathbf{v}_i = \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{i-1}$, $i = 1, \dots, N$, соединяющих соседние точки. Посмотрим, как изменяется направление векторов, когда мы переходим, двигаясь вдоль кривой графика от одной точки к другой. Изменение направления последовательных векторов будем характеризовать величиной синуса угла между ними. Напомним, что если $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$, $\mathbf{g} = (g_x, g_y)$, то вектор $\mathbf{v}^\perp = (v_y, -v_x)$ перпендикулярен \mathbf{v} , $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{g}) = v_x g_x + v_y g_y$,

$\|\mathbf{v}\|^2 = v_x^2 + v_y^2$. Для угла θ между \mathbf{v}_i и \mathbf{v}_{i+1} имеем

$$\cos(\theta) = \frac{(\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_{i+1})}{\|\mathbf{v}_i\| \cdot \|\mathbf{v}_{i+1}\|},$$

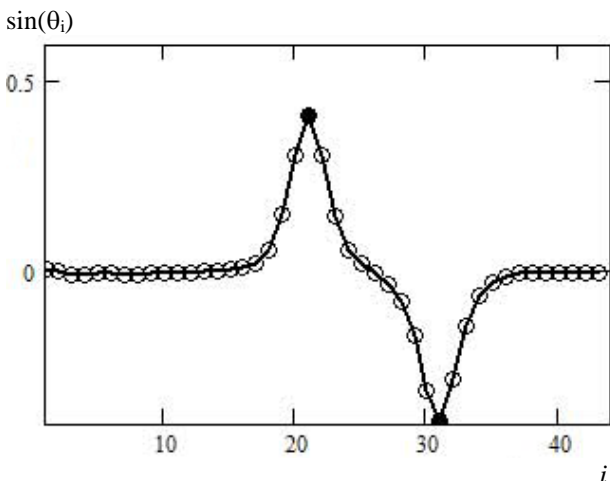


Рис. 11. Показатель степени поворота при движении от точки к точке вдоль L-кривой.

Для тех данных, которые в настоящей статье послужили для построения графических иллюстраций, решение (6) с рекомендуемым параметром

$$s = \sin(\theta) = \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{(\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_{i+1}^\perp)}{\|\mathbf{v}_i\| \cdot \|\mathbf{v}_{i+1}\|}.$$

Сформируем набор точек нового графика $((i, s_i), i = 1, \dots, N)$. Точки максимума и минимума на этом графике соответствуют участкам с максимальной кривизной на исходном графике, при этом с учетом направления изгиба. Описанную процедуру перехода от одного графика к другому обозначим как $sn: ((x_i, y_i), i = 0, \dots, N) \Rightarrow ((i, s_i), i = 1, \dots, N)$. Что даст эта процедура для точек графика L-кривой? Пусть $sn: ((\gamma_i, \rho_i), i = 0, \dots, N) \Rightarrow ((i, z_i), i = 1, \dots, N)$. График сеточной функции $((i, z_i), i = 1, \dots, N)$ показан на рис. 11.

Точки новой кривой, в которых достигается максимальное и минимальное значение, укажут, где на L-кривой находятся участки с наибольшей кривизной и где происходит поворот налево и направо. (Обе точки отмечены на рис. 12.) Локальный максимум новой кривой покажет точку, соответствующую углу L-кривой. Таким образом, весь процесс поиска точки угла включает в себя вычисление сеточных функций $g(p_i)$ и $r(p_i)$, необходимых для построения графика L-кривой, процедуру sn перехода от графика L-кривой к графику изменения степени поворота при движении вдоль L-кривой и определение для него точки максимума и ее индекса i_0 . Значит, углу соответствует точка графика с индексом i_0 . Параметр регуляризации, рекомендуемый критерием L-кривой, будет, соответственно, $\alpha = 10^{p_{i_0}}$.

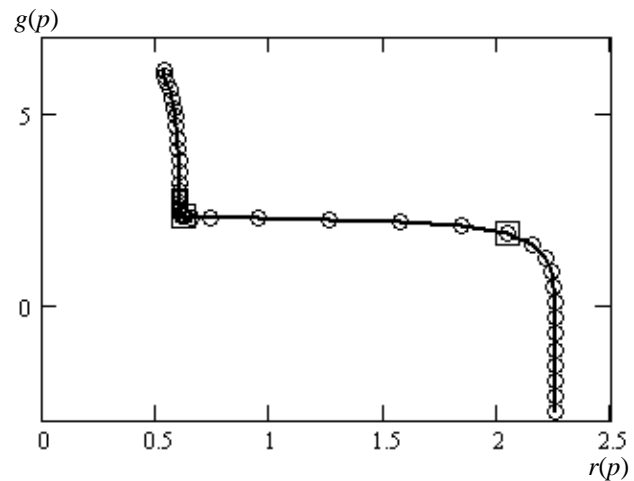


Рис. 12. L-кривая с найденными точками максимальной кривизны. Зрительно оценка кривизны зависит от выбранного для осей масштаба.

ром регуляризации даст, например, для двух разных уровней погрешности в данных результат, показанный на рис. 13. Видно, что результат

зависит от уровня «шума», но оценка качества (или удачности) выбора ПР по критерию L-кривой выходит за рамки данной статьи.

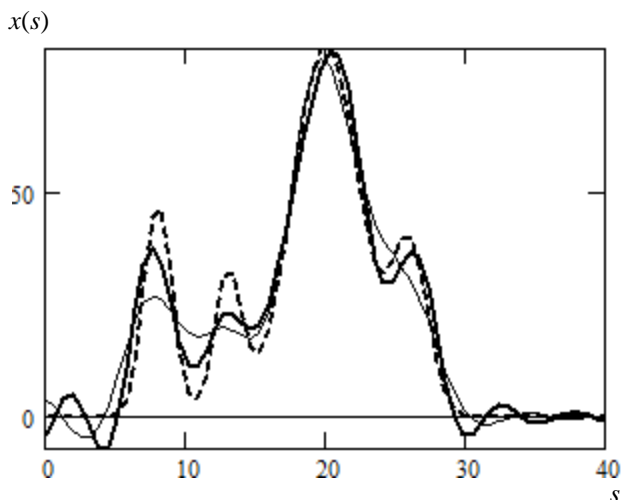


Рис. 13. Модельный входной (---) и восстановленные сигналы (при уровне «шума» 2 % - (—) и 5 % - (-)).

Важно отметить, что критерий L-кривой имеет эвристический характер и обосновывается интуицией и правдоподобными рассуждениями о балансе между ошибками, которые вносят в решение задачи регуляризации и погрешность в данных. Само понятие угла L-кривой оказывается неоднозначным. Кроме точки кривой, где та имеет максимальную кривизну, в качестве угла предлагается также точка, максимально близкая к началу координат [5]. Описанный выше подход, определяющий угол L-кривой на основе анализа углов поворота векторов, соединяющих соседние точки графика L-кривой, дает еще один вариант выбора. Можно предложить и другие подходы к выбору точки в области угла L-кривой, которые могут его представлять. Например, учитывая отмеченное выше сходство между графиками L-кривой и графиком функции невязки $r(p)$ (с учетом поворота на 90^0), можно выбрать точку на графике невязки в области, где та имеет максимум кривизны (имеет свой «угол», который при замене переменной и перейдет в угол L-кривой), и получить для L-кривой соответствующую точку.

При построении L-кривой происходит сильное сжатие в область угла большой группы точек на графике функции нормы $g(p)$ (или функции невязки $r(p)$), из которых L-кривая получается после соответствующей замены переменной. Поэтому неоднозначность или погрешность в выборе точки угла L-кривой будут заметно влиять на получаемое значение параметра регуляризации.

4. Выводы

Рассмотренная процедура поиска угла L-кривой проще традиционного подхода с вычислением ее кривизны и подхода, когда от набора точек переходят к сплайнам, и удобна для применения на практике.

На основе проведенного анализа свойств L-кривой и связанных с ней зависимостей $g(p)$ и $r(p)$ можно сделать некоторые выводы относительно самого критерия L-кривой.

1. L-кривую можно трактовать не только как параметрически заданную кривую, но и как преобразованный график функции нормы регуляризованного решения от невязки. От него она «наследует» свои основные свойства.

2. Одновременно L-кривая является графиком обратной функции, т.е. функции невязки от нормы. Поэтому она похожа и на график невязки $r(p)$ (с учетом поворота графика на 90^0).

3. Для метода регуляризации характерны изменения величин в широком диапазоне. Поэтому замены переменных, эквивалентные переходу к логарифмической шкале, упрощают вычисления и делают удобным изображение зависимостей на графике.

4. Положение угла определяется главным образом тем, где на графике невязки $r(p)$ почти горизонтальный участок медленного роста переходит в участок заметного роста. Поэтому, кстати, критерий L-кривой и принцип невязки должны давать близкие результаты.

5. На участок кривой в области угла приходится всего 2 - 3 порядка изменения параметра регуляризации. Происходит сжатие той области, где находится точка, соответствующая разумному выбору ПР. Это делает процедуру определения ПР зависимой от критерия выбора точки угла L-кривой и чувствительной к ошибкам такого выбора.

6. Разный масштаб шкал влияет на вид кривой и меняет положение точек, соответствующих максимальной кривизне.

7. Угол L-кривой, в принципе, могут представлять разные точки.

8. Если точки в области угла «скачут», как это описано в [7], то это противоречит свойствам величин невязки и нормы решения. Допустимая область для каждой следующей точки – ниже и правее (раз одна величина убывает, а другая возрастает с ростом ПР). Причиной нарушения этого свойства может быть погрешность применяемых численных методов, например вычисление путем численного интегрирования.

9. Кроме выбора конкретного значения ПР было бы желательно исследовать всю область благоприятных значений параметра регуляризации и получить при этом возможность сравнивать разные методы выбора ПР по положению предлагаемых значений ПР в этой области благоприятных значений.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. *Методы решения некорректных задач* (Москва: Наука, 1979).
2. В.А. Морозов. *Регулярные методы решения некорректно поставленных задач* (Москва: Изд-во МГУ, 1974).
3. А.В. Гончарский, А.М. Черепашук, А.Г. Ягола. *Численные решения обратных задач астрофизики* (Москва: Наука, 1978).
4. J. Weese. A reliable and fast method for the solution of Fredholm integral equation of the first kind based on Tikhonov regularization. *Computer Physics Communications* 69 (1992) 99.
5. P.C. Hansen. The L-curve and its use in the numerical treatment of inverse problems. In: *Computational Inverse Problems in Electrocardiography*. Ed. P. Johnston (Southampton: WIT Press, 2001) p. 119.
6. P.C. Hansen, D.P. O'Leary. The use of the L-curve in the regularization of discrete ill-posed problems. *SIAM J. Sci. Comput.* 14 (1993) 1487.
7. G. Rodriguez, D. Theis. An algorithm for estimating the optimal regularization parameter by the L-curve. *Rendiconti di Matematica. Serie VII.* 25 (2005) 69.

О. М. Соколов*

Институт ядерных исследований НАН Украины, Київ, Україна

*Відповідальний автор: amsklv@i.ua

**УРАХУВАННЯ АПАРАТНОЇ ФУНКЦІЇ ПРИ РЕЄСТРАЦІЇ ДОСЛІДНИХ ДАНИХ:
ОСОБЛИВОСТІ ВИБОРУ ПАРАМЕТРА РЕГУЛЯРИЗАЦІЇ ЗА КРИТЕРІЄМ L-КРИВОЇ
ПРИ ДЕКОНВОЛЮЦІЇ СПЕКТРА**

У рамках завдання деконволюції спектра запропоновано варіант вибору параметра регуляризації за критерієм L-кривої, заснований на переміщенні по точках графіка L-кривої. Проведено аналіз залежностей, на основі яких будується L-крива. Сама L-крива трактується як графік складної функції норми регуляризованого рішення від нев'язки, відзначено її схожість із графіком нев'язки.

Ключові слова: апаратна функція, спектр, метод регуляризації, критерій L-кривої.

A. M. Sokolov*

Institute for Nuclear Research, National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, Ukraine

*Corresponding author: amsklv@i.ua

**ACCOUNTING FOR APPARATUS FUNCTION WHEN REGISTERING EXPERIMENTAL DATA:
PECULIARITY OF CHOOSING REGULARIZATION PARAMETER BY L-CURVE CRITERION
AT DECONVOLUTION OF THE SPECTRUM**

Within the framework of the problem of spectrum deconvolution, variant of the choice of the regularization parameter by criterion of the L-curve, based on the displacement along the points of the L-curve graph, is proposed. An analysis of dependencies on which the L-curve based is done. The L-curve itself is interpreted as a graph of the complex function of the norm of a regularized solution from the residual, and its similarity to the graph of the residual is noted.

Keywords: apparatus function, spectrum, regularization method, L-curve criteria.

REFERENCES

1. A.N. Tikhonov, V.Ya. Arsenin. *Methods for Solving Incorrect Tasks* (Moskva: Nauka, 1979). (Rus)
2. V.A. Morozov. *Regular Methods for Solving Incorrectly Assigned Tasks* (Moskva: Moscow State University Publishing House, 1974). (Rus)
3. A.V. Goncharsky, A.M. Cherepashchuk, A.G. Yagola. *Numerical Solutions of Astrophysics Inverse Problems* (Moskva: Nauka, 1978). (Rus)
4. J. Weese. A reliable and fast method for the solution of Fredholm integral equation of the first kind based on Tikhonov regularization. *Computer Physics Communications* 69 (1992) 99.
5. P.C. Hansen. The L-curve and its use in the numerical treatment of inverse problems. In: *Computational Inverse Problems in Electrocardiography*. Ed. P. Johnston (Southampton: WIT Press, 2001) p. 119.
6. P.C. Hansen, D.P. O'Leary. The use of the L-curve in the regularization of discrete ill-posed problems. *SIAM J. Sci. Comput.* 14 (1993) 1487.
7. G. Rodriguez, D. Theis. An algorithm for estimating the optimal regularization parameter by the L-curve. *Rendiconti di Matematica. Serie VII.* 25 (2005) 69.

Надійшла 22.11.2018

Received 22.11.2018