УДК 539.163 https://doi.org/10.15407/jnpae2016.03.226

С. Н. Федоткин

Институт ядерных исследований НАН Украины, Киев

СЕЧЕНИЕ ФОТОЭФФЕКТА, УСРЕДНЕННОЕ ПО ВСЕМ АТОМНЫМ ЭЛЕКТРОНАМ

Предложен простой метод для расчета поперечного сечения фотоэффекта, усредненного по всем электронам. Рассмотрение проводится в рамках статистической модели Томаса - Ферми с некоторым новым предположением. Это приближение позволяет достаточно просто вычислять средние вероятности различных процессов с участием всех электронов атома. Полное поперечное сечение фотоэффекта вычисляется с использованием приближенного аналитического выражения для плотности электронов атома. Получено неплохое согласие между полными сечениями фотоэффекта в предложенном подходе и рассчитанными в рамках квантовой механики.

Ключевые слова: фотоэффект, модель Томаса - Ферми, атомная оболочка.

Введение

Фотоэффект – хорошо изученное экспериментально и теоретически явление [1 - 9]. Наряду с водородоподобным приближением [2] использовался самосогласованный подход Хартри - Фока [5], в котором кроме кулоновского поля ядра приближенно учитывалось играющее заметную роль электрон-электронное взаимодействие. Кроме того, для решения многоэлектронной задачи применялись методы R-матрицы [8] и приближение сильной связи [9]. В отличие от подходов Хартри - Фока и ПСФО (приближение случайных фаз с обменом) [1, 6], которое является развитием приближения Хартри - Фока, эти методы достаточно точны. Однако для получения конкретных результатов необходимы существенные упрощения, в результате чего зачастую трудно сказать, что в них реально учитывается, а чем пренебрегается, и имеются трудности в физической интерпретации механизмов процессов [7]. ПСФО [1, 6, 7] является приближенным квантовым методом, который был развит с целью учета сильных многоэлектронных эффектов. В рамках этого подхода были предсказаны различные коллективные эффекты: гигантские резонансы, максимумы и минимумы в парциальных сечениях фотоионизации. В модели локальной плазменной частоты Брандта - Лундквиста [10] атом аппроксимируется неоднородным распределением электронной плотности, а взаимодействие электромагнитного поля с атомными электронами определяется условием плазменного резонанса. Эта модель адекватно описывает фотопоглощение для частот $\omega \simeq Z\,Ry$. Сходный метод был использован в работе [11]. В работах [12, 13] развит гибридный квантово-классический подход для описания сечения фотоэффекта. Общим в подходах [10] и [12] является то, что сечение в них является функционалом электронной плотности. Таким образом, наряду с достаточно точными численными методами расчета сечений фотоэффекта были разработаны менее универсальные, но значительно более простые и физически ясные подходы.

Предлагаемый ниже подход не претендует на детальное описание экспериментальных данных с учетом всех особенностей взаимодействия, а область его применимости ограничивается диапазоном энергий, где коллективные эффекты в атомной оболочке являются несущественными. Имеется некоторое сходство рассматриваемого в статье приближения с гибридным квантово-классическим подходом, предложенным в работе [12], поскольку в обоих подходах сечение фотоэффекта определяется плотностью электронов атома. Однако в отличие от квантово-классического подхода [12] в нашей работе атомная оболочка рассматривается в статистическом приближении Томаса - Ферми [14, 15]. При этом приближенно учитывается электрон-электронное взаимодействие. С помощью статистической модели обычно вычисляют полную энергию ионизации атомов, средние энергии возбуждения и атомные спектры [16 - 21]. В предлагаемом подходе можно без громоздких вычислений находить также вероятности различных процессов. В качестве иллюстрации рассмотрен атомный фотоэлектрический эффект. Среднее для всего атома полное поперечное сечение фотоэффекта вычисляется с использованием аналитического выражения для плотности электронов в атоме $n(r)$. Эта плотность определяется как функция координат в приближении Тайтца [22] для среднего потенциала. При этом получается достаточно простое выражение для полного сечения фотоэффекта для всего атома и отпадает необходимость в скрупулезном и трудоемком вычислении сечений процессов для каждого электрона и последующем их суммировании.

Сечение фотоэффекта для электронов К-оболочки

Поперечное сечение фотоэмиссии К-электрона с импульсом $\mathbf{p}$ в телесный угол $d\Omega_e$ в нерелятивистском приближении имеет вид [23] ($\hbar = c = 1$)

$$d\sigma = 2\pi m \left| H_{fi} \right|^2 p\, d\Omega_e, \tag{1}$$

где

$$H_{fi} = -\frac{e}{m} \sqrt{\frac{2\pi}{\omega}}\, (\mathbf{ep})\, R_{fi}, \tag{2}$$

$$R_{if} = \int d\mathbf{r}\, \Psi^*_{e^-}(\mathbf{r})\, e^{i\mathbf{kr}}\, \psi_K(\mathbf{r}). \tag{3}$$

Здесь $\mathbf{e}$ и $\mathbf{k}$ ($k = \omega$) вектор поляризации и импульс налетающего на атом фотона, e и m - заряд и масса электрона, а волновые функции К-электрона $\Psi_K(r)$ и выбитого из атома электрона $\Psi_{e^-}(r)$ имеют вид [24]

$$\psi_K(r) = \sqrt{\frac{\eta^3}{\pi}}\, e^{-\eta r}, \quad \eta = \frac{Z}{a_B}, \tag{4}$$

$$\Psi_{e^-}(r) = \frac{e^{i\mathbf{pr}}}{(2\pi)^{3/2}}. \tag{5}$$

Здесь Z и a_B – заряд ядра и боровский радиус. Вычисляя интеграл (3) и интегрируя по углам вылета электрона в приближении

$$I \ll \omega \ll m, \tag{6}$$

где I – энергия связи К-электрона, получаем из формулы (1) хорошо известное выражение для поперечного сечения фотоэффекта для двух электронов на К-оболочке [23]:

$$\sigma_K = \frac{32\sqrt{2}}{3} \pi r_0^2 Z^5 \alpha^4 \left(\frac{m}{\omega}\right)^{7/2}. \tag{7}$$

Здесь α и r_0 – постоянная тонкой структуры и классический радиус электрона соответственно.

Сечение фотоэффекта в статистическом подходе

Вклад всех электронов атома в сечение процесса обычно вычисляется следующим образом: рассчитываются сечения процесса для каждого электрона, а затем все они суммируются. Для многоэлектронных атомов это достаточно трудоемкая задача.

Использование статистической модели Томаса - Ферми [14 - 16] позволяет значительно проще решать подобные проблемы. В этом подходе используется связь между средней плотностью электронов в нейтральном атоме $n(r)$ и полным потенциалом $\Phi(r)$, в котором движутся электроны [16]

$$n(r) = \frac{1}{3\pi^2}\left(2me\Phi(r)\right)^{3/2}. \tag{8}$$

После введения новой функции $\varphi_0(r)$

$$\Phi(r) = \frac{Ze}{r}\, \varphi_0(r) \tag{9}$$

и безразмерной переменной x

$$x = \frac{r}{a}, \quad a = \left(\frac{9\pi^2}{128 Z}\right)^{1/3} a_B \tag{10}$$

уравнение Томаса - Ферми для функции $\varphi_0(x)$ принимает хорошо известный вид

$$\frac{d^2\varphi_0(x)}{dx^2} = \frac{\varphi_0(x)^{3/2}}{\sqrt{x}}.$$

Для дальнейших вычислений вместо численного решения уравнения Томаса - Ферми будет использоваться приближение Тайтца [22], в котором функция $\varphi_0(r)$ выбирается в аналитическом виде с численно подогнанным коэффициентом α_0

$$\varphi_0(r) = \frac{1}{\left(1 + \alpha_0 \dfrac{r}{a}\right)^2}, \tag{11}$$

где $\alpha_0 = 0{,}53625$. Электронная плотность $n(r)$ согласно уравнениям (8), (9) и (11) приобретает вид

$$n(r) = Z\, \frac{1}{4\pi a^3}\, \frac{1}{\left(\dfrac{r}{a}\right)^{3/2}}\, \frac{1}{\left(1 + \alpha_0 \dfrac{r}{a}\right)^3} \tag{12}$$

и нормирована так, что

$$\int d\mathbf{r}\, n(r) \approx Z. \tag{13}$$

Согласно формуле (12) плотность всех атомных электронов пропорциональна заряду Z. Следовательно, можно предположить [25], что распределение плотности для каждого электрона $n_0(r)$

одинаково и согласно определению (12) оно имеет вид

$$n_0(r) = \frac{n(r)}{Z} = \frac{1}{4\pi a^3}\frac{1}{\left(\frac{r}{a}\right)^{3/2}}\frac{1}{\left(1+\alpha_0\frac{r}{a}\right)^3}. \quad (14)$$

Предположим, что распределение плотности $n_0(r)$ (14) соответствует некоторой плотности вероятности найти один электрон в точке $\mathbf{r}$. Сходное предположение делалось в работе [16], где автор проводил аналогию между распределением плотности для одного электрона $n(r)/Z$ в модели Томаса - Ферми и плотностью вероятности найти один электрон в некотором квантовом состоянии $\psi(r)$

$$|\psi(r)|^2 \leftrightarrow \frac{n(r)}{Z}. \quad (15)$$

Сделаем следующий новый шаг и предположим, что существует такая амплитуда плотности вероятности $\psi_{av}(r)$, которая соответствует распределению плотности $n_0(r)$

$$|\psi_{av}(r)|^2 = n_0(r). \quad (16)$$

Тогда функция $\psi_{av}(r)$ будет иметь следующий вид:

$$\psi_{av}(r) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}a^{3/2}}\frac{1}{\left(\frac{r}{a}\right)^{3/4}}\frac{1}{\left(1+\alpha_0\frac{r}{a}\right)^{3/2}}e^{i\varphi}. \quad (17)$$

Мы предполагаем, что фаза φ не зависит от координат. Очевидно, что $\psi_{av}(r)$ не является волновой функцией электрона в кулоновском поле ядра и всех других электронов. Это просто некая функция координат, которая связана с пространственным распределением каждого атомного электрона в приближении, где все они эквивалентны. В этом подходе имеется Z идентичных электронов с одним и тем же пространственным распределением плотности $n_0(r)$ вместо Z атомных электронов с различными квантовыми числами. Это предположение находится в согласии с базисными принципами модели Томаса - Ферми [25].

Принимая во внимание вышеизложенные аргументы, вычислим усредненное поперечное сечение фотоэффекта в модели атома Томаса - Ферми. Предположим, что функция $\psi_{av}(r)$ для атома Томаса - Ферми играет ту же роль, что $\psi_K(r)$ в матричном элементе R_{if} (3) для обычного атома. Так как в модели атома Томаса - Ферми все электроны идентичны, можно вычислить сечение σ_0 для одного электрона с функцией $\psi_{av}(r)$ (17) вместо $\psi_K(r)$ (4) и затем умножить этот результат на полное число электронов Z, чтобы получить усредненное поперечное сечение для всего атома. Следует подчеркнуть, что в таком подходе корректно можно вычислить только полное сечение для всех атомных электронов.

Следовательно, усредненное сечение фотоэффекта для всех атомных электронов σ_{av} в приближении Томаса - Ферми равно

$$\sigma_{av} = Z\sigma_0, \quad (18)$$

где σ_0 имеет вид

$$\sigma_0 = \alpha\frac{4\pi^2 p}{m\omega}\int d\Omega_e \left|R_{fi}^{TF}\right|^2(\mathbf{ep})^2, \quad (19)$$

а R_{fi}^{TF} дается выражением

$$R_{fi}^{TF} = \int d\mathbf{r}\,\Psi_{e^-}^*(\mathbf{r})\,e^{i\mathbf{kr}}\,\psi_{av}(\mathbf{r}). \quad (20)$$

Учитывая, что радиальный интеграл в формуле (20) имеет вид

$$\int d\mathbf{r}\,\frac{e^{i\mathbf{qr}}}{\left(\frac{r}{a}\right)^{3/4}\left(1+\alpha_0\frac{r}{a}\right)^{3/2}} \approx$$

$$\approx \frac{4\pi a^2}{q}\frac{\Gamma(5/4)}{\alpha_0^{5/4}}\operatorname{Im}\Psi\left(\frac{5}{4},\frac{3}{4};\,i\frac{aq}{\alpha_0}\right), \quad (21)$$

где $\mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{p}$, а $\Psi\left(\frac{5}{4},\frac{3}{4};\,i\frac{aq}{\alpha_0}\right)$ – вырожденная гипергеометрическая функция, получаем после интегрирования по углам вылета электрона согласно определениям (18), (19), (20) окончательное выражение для усредненного полного сечения фотоэффекта

$$\sigma_{av} \approx \frac{7\sqrt{2}}{3}\pi r_0^2 Z^{2/3}\frac{\Gamma^2(5/4)}{\alpha_0^{5/2}\alpha^2}\sqrt{\frac{m}{\omega}}\left|\operatorname{Im}\Psi\left(\frac{5}{4},\frac{3}{4};\,i\frac{a\sqrt{2m\omega}}{\alpha_0}\right)\right|^2. \quad (22)$$

Отметим, что полное сечение для всего атома σ_{av} (22) в рассмотренном диапазоне частот (6) убывает с ростом ω и растет при увеличении заряда ядра Z. Однако функциональные зависимости от этих величин полного сечения σ_{av} и сечения фотоэффекта для двух электронов на K-оболочке σ_K (7) отличаются.

Представляет интерес сравнение полного сечения для всего атома σ_{av} (22), вычисленного в статистической модели, с полным сечением, рассчитанным в некотором приближении в рамках квантовой механики. Приближенные соотношения между вкладами в сечение фотоэффекта от электронов различных оболочек (K, L и M) в водородоподобной модели позволяют грубо оценить полное сечение процесса σ_{tot} в рамках квантовой механики [23]:

$$\sigma_{tot} \approx \sigma_K + \sigma_L + \sigma_M \approx \frac{5}{4}\sigma_K . \qquad (23)$$

Тогда отношение сечений σ_{av} (22) и σ_{tot} (23) определяется выражением

$$\frac{\sigma_{av}}{\sigma_{tot}} \approx \frac{7}{10}\frac{1}{\alpha^6 Z^{13/3}}\left(\frac{\omega}{m}\right)^3 \left|\operatorname{Im}\Psi\left(\frac{5}{4}, \frac{3}{4}; \, i\,\frac{320}{Z^{1/3}}\sqrt{\frac{\omega}{m}}\right)\right|^2 . \qquad (24)$$

Ниже представлены отношения сечений (24) для зарядов $15 \le Z \le 36$ при выполнении условия $I \ll \omega \ll m$. Диапазон изменения заряда Z определяется снизу ограничениями применимости метода Томаса - Ферми для достаточно больших зарядов, а сверху выполнением условия (6) для частот ω.

Z	15	17	20	22	24	25	27	30	32	34	36
$\frac{\sigma_{av}}{\sigma_{tot}}$	1,35	1,28	1,24	1,13	1,09	0,85	0,75	0,69	0,68	0,66	0,64

Таким образом, вычисления полного сечения фотоэффекта σ_{av} в статистическом подходе дают для достаточно больших зарядов ядра Z результаты, близкие к расчетам полных сечений σ_{tot} в квантовой механике.

Выводы

В рамках статистической модели Томаса - Ферми получены оценки для усредненного полного сечения фотоэффекта. При расчете сечений использовалось аналитическое выражение для плотности атомных электронов в приближении Тайтца для среднего потенциала.

Ни метод Томаса - Ферми, ни проведенные в настоящей работе квантовые вычисления не являются точными. Однако оценки сечений, полученные статистическим методом и путем приближенных квантово-механических расчетов, находятся в хорошем согласии для достаточно больших зарядов Z. Хотя предложенный статистический метод является приближенным, но в области своей применимости он выглядит в некоторых случаях более предпочтительным для расчета полного сечения фотоэффекта из-за большой сложности и громоздкости других подходов. Кроме того, в рамках рассмотренного приближения имеется возможность для проведения простого качественного анализа полученных результатов.

Подчеркнем, что предложенный выше подход кроме описания фотоэффекта имеет более широкую область применения, т. е. в рассмотренном приближении можно рассчитывать вероятности различных процессов, в которых участвуют все электроны атомной оболочки.

Следует отметить, что нашей задачей было не точное вычисление сечений фотоэффекта с учетом множества факторов, влияющих на его величину, а демонстрация простого статистического метода, который может быть использован для решения различных проблем с участием всех электронов атома.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Амусья М.Я.* Атомный фотоэффект. - М.: Физматгиз, 1987. - 272 с.
2. *Ахиезер А.И., Берестецкий В.Б.* Квантовая электродинамика. - М.: Физматгиз, 1959. - 656 с.
3. *Scofield J.H.* *K*- and *L*-shell ionization of atoms by relativistic electrons // Phys. Rev. - 1978. - Vol. A18. - P. 963.
4. *Safronova U.I., Safronova M.S.* Third-order relativistic many-body calculations of energies, transition rates, hyperfine constants, and blackbody radiation shift in Y171b+ // Phys. Rev. A. - 2009. - Vol. 79. - P. 022512.

5. *Fischer C. F.* The Hartree - Fock method for atoms. - N.Y., London: JohnWiley & Sons, 1977.
6. *Amusia M.Ya, Ivanov V.K., Kupchenko V.A.* The effect of atomic rearrangement on the photoionisation cross section for 3d subshells of the isoelectronic Xe series // J. Phys. B. - 1985. - Vol. 18. - P. 3871.
7. *Амусья М.Я., Черепков Н.А., Чернышева Л.В., Иванов В.К.* Теория многоэлектронных эффектов в атомных процессах. - СПб.: Наука, 2006. - 385 с.
8. *Electronic* and Atomic Collision / Ed. by G. Watel, P. G. Burke. - North-Holland, Amsterdam-N-Y-Oxford, 1978. - 201 p.
9. *Smith K., Henry R.J., Burke P.G.* // Phys. Rev. - 1966. - Vol. 147. - P. 21.
10. *Brandt W., Lundqvist S.* // Phys. Rev. - 1965. - Vol. 139. - P. A612.
11. *Vinogradov A.V., Tolstikhin O.I.* Resonant photoabsorption and polarizability of inhomogeneous dielectric particles // Zh. Exp. Teor. Fiz. - 1989. - Vol. 96. - P. 1204.
12. *Rost J.M.* Analytical total photo cross section for atoms // J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. - 1995. - Vol. 28. - P. L601.
13. *Ndinya B.O., Okeyo S.O.* Analytical Absorption Cross-Section for Photon by a Hydrogen 2s Atom // Commun. Theor. Phys. - 2011. - Vol. 55. - P. 659.
14. *Thomas L.H.* // Proc. Camb. Phil. Soc. - 1927. - Vol. 23. - P. 542.
15. *Fermi E.* // C. Acc. Lincei. - 1927. - Vol. 6. - P. 602; Z. Phys. - 1928. - Vol. 48. - P. 73.
16. *Gombas P.* Die statistische theorie des atoms und ihre anwendungen. - Wien: Springer-Verlag, 1949. - 399 p.
17. *Theory* of the inhomogeneous electron gas / Ed. by S. Lundqvist, N. H. March. - New York and London: Plenum Press, 1983.
18. *Brack M., Bhaduri R.K.* Semiclassical Physics. - USA: Westview Press, Boulder, 2003. - 458 p.
19. *Seriy S.* Modern *Ab-Initio* Calculations on Modified Tomas-Fermi-Dirac Theory // Open Journal of Modelling and Simulation. - 2015. - Vol. 3. - P. 96.
20. *Karpov V.Ya., Shpatakovskaya G.V.* Inclusion of the discreteness of the electronic spectrum in the statistical model of free ions // Journ. Experim. Theor. Physics Letters. - 2013. - Vol. 98. - P. 348.
21. *Shpatakovskaya G.V.* Semiclassical model of the structure of matter// Journ. Physics-Uspekhi. - 2012. - Vol. 55. - P. 429.
22. *Tietz T.* Simple Analytical Eigenfunctions of Electrons in Thomas - Fermi Atoms // Zs. Naturfosch. - 1968. - Vol. 23a. - P. 191.
23. *Heitler W.* Quantum Theory of Radiation. - London: Oxford University Press, 1954. - 453 p.
24. *Bethe H.A., Solpeter E.E.* Quantum mechanics of one- and two electron atom. - Berlin-Gottingen-Heidelberg: Springer-Verlag, 1957. - 562 p.
25. *Fermi E., Amaldi E.* // Mem. Acc. Italia. - 1934. - Vol. 6. - P. 117.

С. М. Федоткін

Інститут ядерних досліджень НАН України, Київ

ПЕРЕРІЗ ФОТОЕФЕКТУ, УСЕРЕДНЕНИЙ ЗА ВСІМА АТОМНИМИ ЕЛЕКТРОНАМИ

Запропоновано простий метод для розрахунку поперечного перерізу фотоефекту, усередненого за всіма електронами. Розгляд проводиться в рамках статистичної моделі Томаса - Фермі з деяким новим припущенням. Це наближення дозволяє досить просто обчислювати середні ймовірності різних процесів за участю всіх електронів атома. Середній поперечний переріз фотоефекту обчислюється з використанням аналітичного виразу для густини електронів атома. Отримано непогане узгодження між повними перерізами фотоефекту в запропонованому підході та розрахованими в рамках квантової механіки.

Ключові слова: фотоефект, модель Томаса - Фермі, атомна оболонка.

S. N. Fedotkin

Institute for Nuclear Research, National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv

CROSS-SECTION OF THE PHOTOEFFECT AVERAGED OVER THE ATOMIC ELECTRONS

Simple approximate method for calculation of the cross sections of the photoeffect averaged over all atomic electrons is suggested. This method is based on the statistical Thomas - Fermi model with a new additional assumption. The proposed approach allows to calculate rather simply the average probabilities of various processes with participation of all atomic electrons. For this purpose averaged density of the atomic electrons is calculated analytically. Good agreement between the total cross-sections for all atomic electrons calculated in the described approach and in the framework of the quantum mechanics is obtained.

Keywords: photoeffect, Thomas - Fermi model, atomic shell.

REFERENCES

1. *Amusia M.J.* Atomic photoeffect. - Moskva: Fizmatgiz, 1987. - 272 p. (Rus)
2. *Akhiezer A.I., Berestetskiy V.B.* Quantum electrodynamics. - Moskva: Fizmatgiz, 1959. - 656 p. (Rus)
3. *Scofield J.H. K*- and *L*-shell ionization of atoms by relativistic electrons // Phys. Rev. - 1978. - Vol. A18. - P. 963.
4. *Safronova U.I., Safronova M.S.* Third-order relati-

vistic many-body calculations of energies, transition rates, hyperfine constants, and blackbody radiation shift in Y171b+ // Phys. Rev. A. - 2009. - Vol. 79. - P. 022512.
5. *Fischer C. F.* The Hartree - Fock method for atoms. - N.Y., London: JohnWiley & Sons, 1977.
6. *Amusia M.Ya, Ivanov V.K., Kupchenko V.A*. The effect of atomic rearrangement on the photoionisation cross section for 3d subshells of the isoelectronic Xe series // J. Phys. B. - 1985. - Vol. 18. - P. 3871.
7. *Amusia M.Ya., Shards N.A., Chernysheva L.V., Ivanov V.K.* Theory of many-electron effects in atomic processes. – Sankt-Peterburg: Nauka, 2006. - 385 p. (Rus)
8. *Electronic* and Atomic Collision / Ed. by G. Watel, P. G. Burke. - North-Holland, Amsterdam-N-Y-Oxford, 1978. - 201 p.
9. *Smith K., Henry R.J., Burke P.G.* // Phys. Rev. - 1966. - Vol. 147. - P. 21.
10. *Brandt W., Lundqvist S.* // Phys. Rev. - 1965. - Vol. 139. - P. A612.
11. *Vinogradov A.V., Tolstikhin O.I.* Resonant photo-absorption and polarizability of inhomogeneous dielectric particles // Zh. Exp. Teor. Fiz. - 1989. - Vol. 96. - P. 1204.
12. *Rost J.M.* Analytical total photo cross section for atoms // J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. - 1995. - Vol. 28. - P. L601.
13. *Ndinya B.O., Okeyo S.O.* Analytical Absorption Cross-Section for Photon by a Hydrogen 2s Atom // Commun. Theor. Phys. - 2011. - Vol. 55. - P. 659.
14. *Thomas L.H.* // Proc. Camb. Phil. Soc. - 1927. - Vol. 23. - P. 542.
15. *Fermi E.* //C. Acc. Lincei. - 1927. - Vol. 6. - P. 602; Z. Phys. - 1928. - Vol. 48. - P. 73.
16. *Gombas P.* Die statistische theorie des atoms und ihre anwendungen. - Wien: Springer-Verlag, 1949. - 399 p.
17. *Theory* of the inhomogeneous electron gas / Ed. by S. Lundqvist, N. H. March. - New York and London: Plenum Press, 1983.
18. *Brack M., Bhaduri R.K.* Semiclassical Physics. - USA: Westview Press, Boulder, 2003. - 458 p.
19. *Seriy S.* Modern *Ab-Initio* Calculations on Modified Tomas-Fermi-Dirac Theory // Open Journal of Modelling and Simulation. - 2015. - Vol. 3. - P. 96.
20. *Karpov V.Ya., Shpatakovskaya G.V.* Inclusion of the discreteness of the electronic spectrum in the statistical model of free ions // Journ. Experim. Theor. Physics Letters. - 2013. - Vol. 98. - P. 348.
21. *Shpatakovskaya G.V.* Semiclassical model of the structure of matter// Journ. Physics-Uspekhi. - 2012. - Vol. 55. - P. 429.
22. *Tietz T.* Simple Analytical Eigenfunctions of Electrons in Thomas - Fermi Atoms // Zs. Naturfosch. - 1968. - Vol. 23a. - P. 191.
23. *Heitler W*. Quantum Theory of Radiation. - London: Oxford University Press, 1954. - 453 p.
24. *Bethe H.A., Solpeter E.E.* Quantum mechanics of one- and two electron atom. - Berlin-Gottingen-Heidelberg: Springer-Verlag, 1957. - 562 p.
25. *Fermi E., Amaldi E. //* Mem. Acc. Italia. - 1934. - Vol. 6. - P. 117.

Надійшла 14.07.2016
Received 14.07.2016