

В. І. Жаба

Ужгородський національний університет, Ужгород

**НОВІ АНАЛІТИЧНІ ФОРМИ ХВИЛЬОВОЇ ФУНКЦІЇ ДЕЙТРОНА
ДЛЯ ПОТЕНЦІАЛІВ НЕЙМЕГЕНСЬКОЇ ГРУПИ**

Для апроксимації хвильових функцій дейтрона в координатному представленні запропоновано дві нові аналітичні форми. Вони представлені у вигляді добутку степеневі функції r^n на суму експоненціальних членів $A_i \cdot \exp(-a_i \cdot r^3)$. Для реалістичних феноменологічних потенціалів неймегенської групи за цими формами побудовано хвильові функції дейтрона в координатному представленні, які не містять надлишкових вузлів. Порівнюються розраховані параметри дейтрона з експериментальними і теоретичними даними.

Ключові слова: хвильова функція, аналітична форма, дейтрон, вузол.

Вступ

Дейтрон є найпростішим ядром, яке складається з двох сильно взаємодіючих частинок (протона і нейтрона). Простота будови дейтрона робить його зручною лабораторією для вивчення нуклон-нуклонних сил. На даний час дейтрон добре вивчений як експериментально, так і теоретично.

Розрахунки статичних характеристик дейтрона (енергія зв'язку, магнітний момент, електричний квадрупольний момент та ін.) добре узгоджуються з експериментальними даними [1]. Але, незважаючи на це, існують певні теоретичні неузгодженості. Наприклад, у роботі [2] одна компонента хвильової функції дейтрона для Боннського потенціалу має вузол поблизу початку координат. Така поведінка хвильової функції суперечить загальній математичній теоремі про число вузлів власних функцій крайових задач [3]. Основному стану системи відповідає функція без вузлів у середині інтервалу крайової задачі. Наявність вузлів у хвильових функціях основного та єдиного стану дейтрона може вказувати на існування певних неузгодженостей у реалізації чисельних алгоритмів, що застосовуються і подібних задачах. У роботі [4] показано, що асимптотика компонент розв'язку системи рівнянь уже не визначається одним орбітальним моментом L , як у випадку з розв'язками одиночного рівняння Шредінгера, а обумовлюється повним орбітальним моментом J та асимптотичною поведінкою тензорного потенціалу на малих відстанях, який забезпечує зв'язування рівнянь Шредінгера в систему. Вплив вибору чисельних алгоритмів на розв'язки задачі наведено в роботах [4 - 6].

Такі потенціали нуклон-нуклонної взаємодії, як боннський [2], московський [7], потенціали неймегенської групи (NijmI, NijmII, Nijm93 [8]), Argonne v18 [9] чи парижський потенціал [10], мають досить непросту структуру і громіздкий

запис. Оригінальний потенціал Рейда Reid68 був параметризований на основі фазового аналізу неймегенською групою і отримав назву Reid93. Параметризація була проведена для 50 параметрів потенціалу, причому $\chi^2/N_{data} = 1,03$ [8].

Крім того, хвильова функція дейтрона може бути представлена таблично – через відповідні масиви значень радіальних хвильових функцій. Іноді при чисельних розрахунках оперувати такими масивами чисел доволі складно. І текст програм для чисельних розрахунків є перевантажений. Тому є доцільним отримання більш простих аналітичних форм представлення хвильових функцій дейтрона.

**Аналітична форма
хвильової функції дейтрона**

Відомі чисельні значення радіальної хвильової функції дейтрона в координатному представленні можна апроксимувати за допомогою зручних розкладів [11] в аналітичній формі

$$\begin{cases} u_a(r) = \sum_{i=1}^{N_a} A_i \exp(-a_i r^2), \\ w_a(r) = r^2 \sum_{i=1}^{N_a} B_i \exp(-b_i r^2), \end{cases} \quad (1)$$

асиметричного подвійного сигмоїдала [7]

$$R_l = C_0 + C_1 \cdot \frac{1}{1 + \exp\left(-\frac{r - C_2 + C_3/2}{C_4}\right)} \times \left(1 - \frac{1}{1 + \exp\left(-\frac{r - C_2 - C_3/2}{C_5}\right)} \right), \quad (2)$$

© В. І. Жаба, 2016

або апроксимацій юкавівського вигляду [2, 10, 12]

$$\begin{cases} u_b(r) = \sum_{j=1}^{N_b} C_j \exp(-m_j r), \\ w_b(r) = \sum_{j=1}^{N_b} D_j \exp(-m_j r) \left[1 + \frac{3}{m_j r} + \frac{3}{(m_j r)^2} \right], \end{cases} \quad (3)$$

де $m_j = \beta + (j-1)m_0$; $\beta = \sqrt{ME_d}$; $m_0 = 0,9 \text{ фм}^{-1}$. M – нуклонна маса; E_d – енергія зв'язку дейтрона. Пошук коефіцієнтів аналітичної форми (3) був здійснений для боннського [2] і парижського потенціалів [10], причому $N_b = 11$. У виразі (2) параметр C_0 не завжди є додатним числом, тому виникає надлишковий вузол.

Крайові умови для виразу (3) при $r \rightarrow 0$:

$$u_b(r) \rightarrow r, \quad w_b(r) \rightarrow r^3. \quad (4)$$

Асимптотики хвильової функції дейтрона на $r \rightarrow \infty$:

$$u(r) \sim A_S \exp(-\beta r), \quad (5)$$

$$w(r) \sim A_D \exp(-\beta r) \left[1 + \frac{3}{\beta r} + \frac{3}{(\beta r)^2} \right],$$

де A_S і A_D – асимптотики нормування S - і D -станів.

Крім виразів (1) - (3), хвильову функцію дейтрона для потенціалів неймегенської групи можна апроксимувати аналітичними формами

$$\begin{cases} u_c(r) = r^{3/2} \sum_{i=1}^{N_c} E_i \exp(-e_i r^3), \\ w_c(r) = r \sum_{i=1}^{N_c} F_i \exp(-f_i r^3), \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} u_d(r) = P_{(2)} \sum_{i=1}^{N_d} G_i \exp(-g_i r^3), \\ w_d(r) = P_{(4)} \sum_{i=1}^{N_d} H_i \exp(-h_i r^3), \end{cases} \quad (7)$$

де $P_{(2)}$ і $P_{(4)}$ – поліноми другого і четвертого порядку. При $N_c = 11$ здійснювався пошук показника степеневі функції r^n , що фігурує як множник перед сумами експоненціальних членів аналіти-

чної форми (6). Оптимальними значеннями виявилися $n = 1,47$ і $n = 1,01$ для $u(r)$ і $w(r)$ відповідно. Тобто множники перед сумами у виразі (6) можна вибрати як $r^{3/2}$ і r^1 .

Незважаючи на громіздкі і довготривалі розрахунки та мінімізації χ^2 (до величини менших за 10^{-4}), доводилося апроксимувати чисельні значення хвильових функцій дейтрона для потенціалів неймегенської групи (NijmI, NijmII, Nijm93 [8]), масиви чисел яких становили по $839 \cdot 4$ значень в інтервалі $r = 0 - 25 \text{ фм}$. Значення коефіцієнтів розкладу E_i, e_i, F_i, f_i для формул (6) наведено в табл. 1 - 3 ($N_c = 11$). Точність параметризації (6) характеризується величинами [2]

$$I_S = \left(\int_0^\infty [u(r) - u_c(r)]^2 dr \right)^{1/2} = 1,2 \cdot 10^{-4}, \quad (8)$$

$$I_D = \left(\int_0^\infty [w(r) - w_c(r)]^2 dr \right)^{1/2} = 1,4 \cdot 10^{-4}. \quad (9)$$

Для оцінки точності параметризації замість виразів (8) і (9) зручніше використовувати величину

$$\chi^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i; a_1, a_2, \dots, a_p))^2}{n - p}, \quad (10)$$

де n – число точок масиву y_i чисельних значень хвильових функцій дейтрона в координатному представленні ($n = 839$); f – апроксимуюча функція u (або w) згідно з виразом (6); a_1, a_2, \dots, a_p – параметри; p – число параметрів (коефіцієнтів сум у виразі (6)). Отже, χ^2 визначається не тільки формою апроксимуючої функції f , але й числом вибраних параметрів. Для $u(r)$ значення χ^2 становить 10^{-7} , а для $w(r)$ – 10^{-8} .

На відміну від виразів (2) і (3) аналітична форма (6) є зручною тим, що забезпечує крайову умову $u(0) = 0$; $w(0)$. І не потрібно додатково знаходити асимптотику хвильових функцій поблизу початку координат. Для $r \rightarrow \infty$ використовувалася асимптотика у вигляді (5).

Розраховані радіальні хвильові функції дейтрона $u(r)$ і $w(r)$ за аналітичними формами (6) у конфігураційному представленні не містять надлишкових вузлів. На рис. 1 і 2 показано поведінку хвильових функцій дейтрона біля початку координат. Отримані хвильові функції дейтрона добре корелюють із даними роботи [13].

Таблиця 1. Коефіцієнти аналітичної форми (6) для потенціалу NijmI

i	E_i	e_i	F_i	f_i
1	0,059474792604983	0,820048123485302	0,216703934160404	-0,46062130918550
2	0,029815289846499	0,008925232016521	1,605852802910391	-0,05815455970908
3	0,054093376131691	0,025498742322776	0,291264938712191	0,168130012367292
4	0,003754884398435	0,000853238833103	0,094286720550631	0,065723334248829
5	0,076152850036076	0,276725768486299	5,432373080615632	-0,05688725511771
6	0,012623230198183	0,002868854515628	0,005309112421684	0,009307445117482
7	0,055227006777511	0,109973467568329	0,207373176910015	0,186164838918455
8	0,055367234187456	0,138446998423688	0,207372849758410	0,186596774580701
9	0,108440685265484	0,382785761360802	5,432373080319048	-0,05688725495011
10	0,000542494001356	0,000217880096959	0,000831816055069	0,001352073835287
11	0,061459447768940	0,059212785941109	0,024128420330076	0,032026505193536

Таблиця 2. Коефіцієнти аналітичної форми (6) для потенціалу NijmII

i	E_i	e_i	F_i	f_i
1	0,100534520422043	0,251018819916337	0,126943090633750	-0,53113374184205
2	0,054286869011138	0,057442534595369	0,218940646725675	0,156510973923901
3	0,051278450057958	0,015600438117511	0,110684829492098	0,127632990059071
4	0,000814767311165	0,000260405824367	0,115497416682183	0,127617693287994
5	0,076562509307441	0,251007390539791	4,722499098968948	-0,08308339515975
6	0,041994669536818	0,251009303096756	0,004871680145179	0,008411658752901
7	0,005869159261571	0,001146927630628	0,117531418761814	0,127621420370460
8	0,033972775878515	0,057451551324434	0,116012967954140	0,127618151426690
9	0,048710359630614	0,251011494582336	4,722499098969801	-0,08308339516002
10	0,019984994410513	0,004345797074014	0,000776726189794	0,001208526589511
11	0,031082972309765	0,057443362285818	0,022141456306319	0,030108870003356

Таблиця 3. Коефіцієнти аналітичної форми (6) для потенціалу Nijm93

i	E_i	e_i	F_i	f_i
1	0,108158922056900	0,322843406882508	0,179007868039459	-0,49551653602562
2	0,059853308401022	0,322238702916314	0,254707539462443	0,224767666483098
3	0,000988499937104	0,000284873387262	0,012705460633378	0,014729943005680
4	0,048517972009155	0,075231693391126	0,001144517190176	0,001283074302584
5	0,062564722993285	0,322189096838678	5,013179412294758	-0,08329753146954
6	0,007194322349655	0,001326489490838	0,154332010904778	0,199804896403292
7	0,062095388454927	0,020017090383419	0,000262490061461	0,000166238317782
8	0,049196871063984	0,073208280814316	0,004039748088559	0,005059646459065
9	0,024533675856846	0,005315783506284	5,013179410725441	-0,08329753146557
10	0,038064498676696	0,076574723953854	0,154332010904783	0,199804896403214
11	0,036149451152707	0,322417369499423	0,038551683049846	0,034958655682995

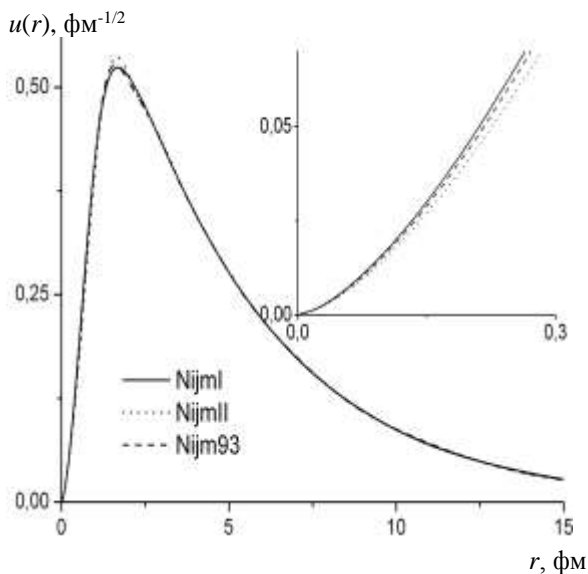


Рис. 1. Хвильова функція дейтрона $u(r)$, розрахована за аналітичною формою (6).

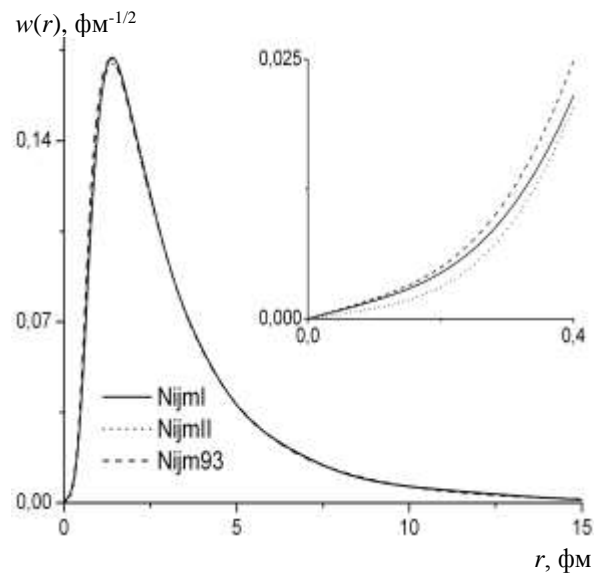


Рис. 2. Хвильова функція дейтрона $w(r)$, розрахована за аналітичною формою (6).

Параметри дейтрона

Якщо відомі хвильові функції (6) у координатному представленні, тоді можна розрахувати параметри дейтрона [2, 5]:

радіус дейтрона

$$r_d = \frac{1}{2} \left\{ \int_0^\infty r^2 [u^2(r) + w^2(r)] dr \right\}^{1/2}; \quad (11)$$

електричний квадрупольний момент

$$Q_d = \frac{1}{20} \int_0^\infty r^2 w(r) [\sqrt{8}u(r) - w(r)] dr; \quad (12)$$

магнітний момент

$$\mu_d = \mu_s - \frac{3}{2} \left(\mu_s - \frac{1}{2} \right) P_D; \quad (13)$$

вклад D -стану

$$P_D = \int_0^\infty w^2(r) dr; \quad (14)$$

асимптотика D/S -стану

$$\eta = A_D / A_S. \quad (15)$$

У формулі (13) величина $\mu_s = \mu_n + \mu_p$ – це сума магнітних моментів нейтрона і протона. Значення розрахованого магнітного моменту дейтрона наведено в ядерних магнетонах μ_N .

Розраховані параметри дейтрона наведено в табл. 4. Вони добре узгоджуються з експериментальними [14] і теоретичними результатами [8].

Таблиця 4. Параметри дейтрона

Потенціал	$P_D, \%$	$r_m, \text{фм}$	$Q_d, \text{фм}^2$	μ_d, μ_N	η
Nijm I (6)	5,66274	1,96599	0,270883	0,847539	0,0285436
Nijm I [8]	5,664	1,967	0,2719	-	0,0253
Nijm II (6)	5,63002	1,96711	0,269793	0,847726	0,0277491
Nijm II [8]	5,635	1,968	0,2707	-	0,0252
Nijm 93 (6)	5,74956	1,96543	0,270572	0,847045	0,025257
Nijm 93 [8]	5,755	1,966	0,2706	-	0,0252
Експеримент [14]	-	1,975(3)	0,2859(3)	0,857438	0,0256(4)

Висновки

Запропоновано дві нові аналітичні форми для апроксимації хвильових функцій дейтрона в координатному представленні.

Чисельно розраховано коефіцієнти нових аналітичних форм (6) для чисельних значень хвильової функції дейтрона в координатному представленні для сучасних реалістичних феноменологічних потенціалів неймегенської групи (NijmI, NijmII, Nijm93). Побудовані за цими формами хвильові функції дейтрона не містять надлишкових вузлів.

Використовуючи хвильові функції дейтрона в координатному представленні, розраховано параметри дейтрона, які добре узгоджуються з наявними в літературі експериментальними і теоретичними результатами.

По отриманих хвильових функціях доцільними є розрахунки поляризаційних характеристик дейтрона [5, 15]: компонента тензора чутливості до поляризації дейтронів T_{20} , тензорної аналізуючої здатності A_{yy} і тензор-тензорної передачі поляризації K_{yy} .

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Machleidt R.* The nuclear force in the third millennium // Nucl. Phys. A. - 2001. - Vol. 689, Iss. 1. - P. 11 - 22.
2. *Machleidt R.* High-precision, charge-dependent Bonn nucleon-nucleon potential // Phys. Rev. C. - 2001. - Vol. 63(2). - P. 024001 - 024032.
3. *Courant R., Hilbert D.* Methods of Mathematical Physics. - New York: Interscience, 1953. - 561 p.
4. *Гайсак І., Жаба В.* Про вузли хвильової функції дейтрона // Вісн. Львів. ун-ту. Серія фіз. - 2009. - № 44. - С. 8 - 15.
5. *Гайсак І.І., Жаба В.І.* Дейтрон: хвильова функція і параметри // Наук. вісн. Ужгород. ун-ту. Серія «Фізика». - 2014. - № 36. - С. 100 - 106.
6. *Бохінюк В.С., Жаба В.І., Парлаг О.М.* До питання про енергетичну залежність перерізу реакції (γ, γ') // Наук. вісн. Ужгород. ун-ту. Серія «Фізика». - 2012. - № 31. - С. 111 - 115.
7. *Kukulin V.I., Pomerantsev V.N., Faessler A. et al.* Moscow-type NN-potentials and three-nucleon bound states // Phys. Rev. C. - 1998. - Vol. 57, Iss. 2. - P. 535 - 554.
8. *Stoks V.G.J., Klomp R.A.M., Terheggen C.P.F. et al.* Construction of high quality NN potential models // Phys. Rev. C. - 1994. - Vol. 49, Iss. 6. - P. 2950 - 2962.
9. *Wiringa R.B., Stoks V.G.J., Schiavilla R.* Accurate nucleon-nucleon potential with charge-independence breaking // Phys. Rev. C. - 1995. - Vol. 51, Iss. 1. - P. 38 - 51.
10. *Lacombe M., Loiseau B., Vinh Mau R. et al.* Parametrization of the deuteron wave function of the Paris N-N potential // Phys. Lett. B. - 1981. - Vol. 101, Iss. 3. - P. 139 - 140.
11. *Дубовиченко С.Б.* Свойства легких атомных ядер в

- потенциальной кластерной модели. - Алматы: Данекер, 2004. - 247 с.
12. *Krutov A.F., Troitsky V.E.* Parametrization of the deuteron wave function obtained within a dispersion approach // *Phys. Rev. C.* - 2007. - Vol. 76, Iss. 1. - P. 017001 - 017003.
 13. *Swart de J.J., Klomp R.A.M.M., Rentmeester M.C.M., Rijken Th.A.* The Nijmegen Potentials // *Few-Body Systems.* - 1996. - Vol. 8. - P. 438 - 447.
 14. *Garcon M., Van Orden J.W.* The deuteron: structure and form factors // *Adv. Nucl. Phys.* - 2001. - Vol. 26. - P. 293 - 378.
 15. *Ладыгин В.П., Ладыгина Н.Б.* Поляризационные эффекты в неупругом рассеянии дейтронов (d,d')X в области возбуждения барионных резонансов // *ЯФ.* - 2002. - Т. 65, вып. 1. - С. 188 - 195.

В. И. Жаба

Ужгородский национальный университет, Ужгород

НОВЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФОРМЫ ВОЛНОВОЙ ФУНКЦИИ ДЕЙТРОНА ДЛЯ ПОТЕНЦИАЛОВ НЕЙМЕГЕНСКОЙ ГРУППЫ

Для аппроксимации волновой функции дейтрона в координатном представлении предложены две новые аналитические формы. Они представлены в виде произведения степенной функции r^n на сумму экспоненциальных членов $A_i \cdot \exp(-a_i \cdot r^3)$. Для реалистических феноменологических потенциалов неймегенской группы по этим формам построены волновые функции дейтрона в координатном представлении, которые не содержат избыточных узлов. Сравниваются рассчитанные параметры дейтрона с экспериментальными и теоретическими данными.

Ключевые слова: волновая функция, аналитическая форма, дейтрон, узел.

V. I. Zhaba

Uzhhorod National University, Uzhhorod

NEW ANALYTICAL FORMS OF A DEUTERON WAVE FUNCTION FOR POTENTIALS OF THE NIJMEGEN GROUP

To approximate the deuteron wave function in coordinate representation two new analytical forms were proposed. They are represented as the product of the power function r^n for the sum of exponential terms $A_i \cdot \exp(-a_i \cdot r^3)$. For realistic phenomenological potentials of the Nijmegen group these forms are constructed as deuteron wave function in the coordinate representation, which do not contain superfluous knots. The calculated parameters of the deuteron compared with experimental and theoretical data are compared.

Keywords: wave functions, analytical form, deuteron, knot.

REFERENCES

1. *Machleidt R.* The nuclear force in the third millennium // *Nucl. Phys. A.* - 2001. - Vol. 689, Iss. 1. - P. 11 - 22.
2. *Machleidt R.* High-precision, charge-dependent Bonn nucleon-nucleon potential // *Phys. Rev. C.* - 2001. - Vol. 63(2). - P. 024001 - 024032.
3. *Courant R., Hilbert D.* *Methods of Mathematical Physics.* - New York: Interscience, 1953. - 561 p.
4. *Haysak I., Zhaba V.* On the nodes of the deuteron wave function // *Visnyk Lviv Univ. Ser. Phys.* - 2009. - Iss. 44. - P. 8 - 15. (Ukr)
5. *Haysak I.I., Zhaba V.I.* Deuteron: wave function and parameters // *Uzhhorod Univ. Scien. Herald. Ser. Phys.* - 2014. - No. 36. - P. 100 - 106. (Ukr)
6. *Bohinyuk V.S., Zhaba V.I., Parlag A.M.* On the reaction cross section energy dependence (γ, γ') // *Uzhhorod Univ. Scien. Herald. Ser. Phys.* - 2012. - No. 31. - P. 111 - 115. (Ukr)
7. *Kukuljin V.I., Pomerantsev V.N., Faessler A. et al.* Moscow-type NN-potentials and three-nucleon bound states // *Phys. Rev. C.* - 1998. - Vol. 57, Iss. 2. - P. 535 - 554.
8. *Stoks V.G.J., Klomp R.A.M., Terheggen C.P.F. et al.* Construction of high quality NN potential models // *Phys. Rev. C.* - 1994. - Vol. 49, Iss. 6. - P. 2950 - 2962.
9. *Wiringa R.B., Stoks V.G.J., Schiavilla R.* Accurate nucleon-nucleon potential with charge-independence breaking // *Phys. Rev. C.* - 1995. - Vol. 51, Iss. 1. - P. 38 - 51.
10. *Lacombe M., Loiseau B., Vinh Mau R. et al.* Parametrization of the deuteron wave function of the Paris N-N potential // *Phys. Lett. B.* - 1981. - Vol. 101, Iss. 3. - P. 139 - 140.
11. *Dubovichenko S.B.* Properties of light atomic nuclei in the potential cluster model. - *Almaty: Daneker, 2004.* - 247 p. (Rus)
12. *Krutov A.F., Troitsky V.E.* Parametrization of the deuteron wave function obtained within a dispersion approach // *Phys. Rev. C.* - 2007. - Vol. 76, Iss. 1. - P. 017001 - 017003.
13. *Swart de J.J., Klomp R.A.M.M., Rentmeester M.C.M., Rijken Th.A.* The Nijmegen Potentials // *Few-Body Systems.* - 1996. - Vol. 8. - P. 438 - 447.
14. *Garcon M., Van Orden J.W.* The deuteron: structure and form factors // *Adv. Nucl. Phys.* - 2001. - Vol. 26. - P. 293 - 378.
15. *Ladygin V.P., Ladygina N.B.* Polarization effects in the inelastic deuteron scattering (d,d')X in the vicinity of baryonic resonance excitation // *Yadernaya Fizika.* - 2002. - Vol. 65, Iss. 1. - P. 188 - 195. (Rus)

Надійшла 26.10.2015
Received 26.10.2015