

УРАВНЕНИЯ РЕЗОНИРУЮЩИХ ГРУПП  
ДЛЯ РЕАКЦИИ С ТРЕХЧАСТИЧНЫМИ КАНАЛАМИ

© 2010 Ю. Е. Козырь

Получена общая форма уравнений резонирующих групп для реакций с каналами, содержащими произвольное число частиц. На этой основе записаны рабочие уравнения для реакции с двутельными каналами и для частного случая реакции, содержащей двутельные и трехтельные каналы. Выполненные вычисления демонстрируют заметное улучшение расчетных дифференциальных сечений упругого рассеяния  ${}^6\text{Li}(\alpha, \alpha){}^6\text{Li}$  при учете канала прямого развала  ${}^6\text{Li}$ . Одновременно наблюдаются существенные ограничения для таких расчетов, обусловленные современными возможностями вычислительной техники.

*Ключевые слова:* уравнения резонирующих групп, многочастичные каналы реакции, рассеяние, прямой развал, дифференциальные сечения.

Введение

В течение последних десятилетий по мере достижения доступности адекватных вычислительных средств основным направлением микроскопического анализа реакций при нерелятивистских столкновениях легких ядер все более уверенно становится развитие сформулированного Уилером [1] подхода к описанию движения фрагментов канала реакции на основе базиса, передающего структуру кластеров многонуклонной системы. Задача построения адекватного базиса по-разному преломляется в составе основных сложившихся версий [2 - 4] этого подхода, названного его автором методом резонирующих групп (МРГ), и сейчас предметом изучения все более оказывается сам базис резонирующих групп. Уже при небольших энергиях в реакциях с самыми легкими ядрами ( $A \leq 4$ ) одноканальная схема МРГ в любой версии обычно не дает удовлетворительного описания упругого рассеяния и для улучшения результатов в расчет, как правило, пытаются включить другие открытые двутельные каналы, обычно начиная с минимального порога. Для малонуклонных систем, однако, очень невысокий порог – часто минимальный – имеют трехтельные каналы реакции. Аппарат МРГ для таких каналов практически не развит и расчеты такого типа единичны [5]. Цель настоящей работы состоит в получении уравнений резонирующих групп, исходя из общей формулировки вариационного принципа квантовой механики для реакций, содержащих каналы с произвольным числом фрагментов (р. 1), их преобразовании к форме, удобной для вычислений в случае реакций с двух- и трехчастичными каналами (р. 2). Практические аспекты применения развитого формализма рассматриваются на простом примере вычисления дифференциальных сечений упругого рассеяния в присутствии трехчастичного канала (р. 3).

Общая форма уравнений резонирующих групп

Уравнения МРГ для многонуклонной системы по существу представляют собой микроскопическое уравнение Шредингера, преобразованное для описания относительного движения некоторого числа подсистем, структура которых предполагается более или менее известной для того, чтобы выполнить интегрирование по их динамическим переменным. Удачный выбор числа и конкретной структуры подсистем в значительной мере определяет успех применения такого подхода. Для ядерной реакции волновые функции подсистем в каждом ее канале образуют базис, на котором строится волновая функция всей системы

$$\Psi = \sum_k A_e F_k(\{\vec{r}_k\}) \prod_{n=1}^{\phi(k)} \Phi_{nk}(\xi_{nk}). \quad (1)$$

Здесь  $\Phi_{nk}(\xi_{nk})$  – волновая функция подсистемы с порядковым номером  $n$  канала  $k$ ,  $\xi_{nk}$  означает набор ее пространственных, спиновых и изоспиновых переменных.  $\phi(k)$  – число подсистем (фрагментов канала, кластеров) в канале  $k$ . Индекс  $k$  определяет конкретный тип фрагментов канала, их спин и четность, спин канала и энергию относительного движения его фрагментов.  $F_k(\{\vec{r}_k\})$  – функция относительного движения фрагментов канала  $k$ , массив ее пространственных переменных, состоящий из  $\phi(k)-1$  векторов, определяющих относительное расположение фрагментов канала в каждой из возможных систем координат Якоби (см. ниже), обозначен как  $\{\vec{r}_k\}$ . Оператор  $A_e$  антисимметризует волновую функцию системы относительно нуклонных перестановок между фрагментами, функции  $\Phi_{nk}(\xi_{nk})$  антисимметризованы относительно пе-

рестановок нуклонов в пределах фрагмента  $n$  канала  $k$ . Спиновая зависимость функции  $\Psi$  в каждом канале, вообще, передается отдельным множителем – спиновой функцией канала, которая образуется обычными процедурами сложения спинов фрагментов канала и с целью сокращения записи здесь и далее не приводится.

Для того чтобы быть решением микроскопического уравнения Шредингера, функция  $\Psi$  должна минимизировать выражение

$$\langle \Psi | H - E | \Psi \rangle, \quad (2)$$

где  $H$  – микроскопический гамильтониан задачи;  $E$  – полная энергия системы. Интегрирование выполняется по всему пространству системы координат центра масс  $A$  нуклонов, т.е. по  $A-1$  независимых переменных. Поскольку вся зависимость от координат  $\xi_{nk}$  сосредоточена в известных базисных функциях  $\Phi_{nk}(\xi_{nk})$ , на основании формулы (2) можно получить функционал относительно функций  $F_k(\{\vec{r}_k\})$ , если выполнить интегрирование по набору независимых  $\xi_{nk}$ . При вычислении матричных элементов (2) на полностью антисимметризованной функции  $\Psi$  для всех реально встречающихся в составе  $H$  операторов можно ограничиться в левой функции только одним слагаемым антисимметризатора (см. [2]). Каждое слагаемое формулы (2), соответствующее переходу в определенной паре каналов, при этом приобретает постоянный множитель, зависящий только от массовых чисел фрагментов канала, который легко вычислить и учесть (см. [2] с. 144).

Микроскопический гамильтониан канала  $k$  записывается в виде

$$H_k = \sum_{i=1}^{\phi(k)} \sum_{j=1}^{A_i} \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_j^2 + \sum_{l>j}^{A_i} v_{jl} \right) + T_k + V_k. \quad (3)$$

Здесь  $T_k = -\sum_{i=1}^{\phi(k)-1} \frac{\hbar^2}{2\mu_i} \nabla_{\vec{r}_i}^2$  – оператор кинетической энергии относительного движения фрагментов канала;  $\phi(k)-1$  пара переменных  $\vec{r}_i$ ,  $\mu_i$  – вектор относительного расположения фрагментов канала и соответствующая приведенная масса в принятой системе координат Якоби. Векторы  $\vec{r}_i$  ( $1 \leq i \leq \phi(k)-1$ ) в настоящей работе определены следующим образом:

$$\vec{r}_i = \frac{1}{A_i} \sum_{j=A_{\bar{n}-A_i+1}}^{A_{\bar{n}}} \vec{r}_j^{(A)} - \frac{1}{A-A_{\bar{n}}} \sum_{j=A_{\bar{n}+1}}^A \vec{r}_j^{(A)};$$

$$A_{\bar{n}} = \sum_{j=1}^i A_j, \quad (4)$$

где  $A_i$  – массовое число фрагмента с порядковым номером  $i$ ;  $\vec{r}_j^{(A)}$  – координата нуклона  $j$  в системе центра масс  $A$  нуклонов. Кластерные координаты  $j$ -го нуклона фрагмента  $i$  определяются как

$$\vec{r}_{A_{\bar{n}-A_i+j}}^{(A)} = \frac{1}{A_i} \sum_{l=1}^{A_i} \vec{r}_{A_{\bar{n}-A_i+l}}^{(A)}.$$

Выбор координат Якоби для канала с тремя фрагментами иллюстрирует рис. 1. Здесь возможны еще два варианта координат Якоби, образуемые циклической перестановкой нумерации фрагментов на рис. 1, они также входят в массив переменных функции  $F_k(\{\vec{r}_k\})$  и в соответствующий оператор  $T_k$ . Собственно,  $F_k(\{\vec{r}_k\})$  здесь представляет всю сумму фаддеевских компонент волновой функции. При  $\phi(k) \geq 4$  набор (4) дополняется векторами, образованными более сложной группировкой фрагментов (см. например [6]), что, однако, не влияет на справедливость дальнейшего изложения.  $v_{jl}$  – потенциал взаимодействия пары нуклонов  $jl$ ,

$$V_k = \sum_{i=1}^{\phi(k)} \sum_{n>i}^{\phi(k)} \sum_{j=1}^{A_i} \sum_{m=1}^{A_n} v_{jm}$$

– энергия взаимодействия фрагментов канала. Сумма в формуле (3) – оператор полной внутренней энергии фрагментов канала  $k$ , дифференцирование в ней идет по кластерным координатам нуклонов фрагмента  $i$ .

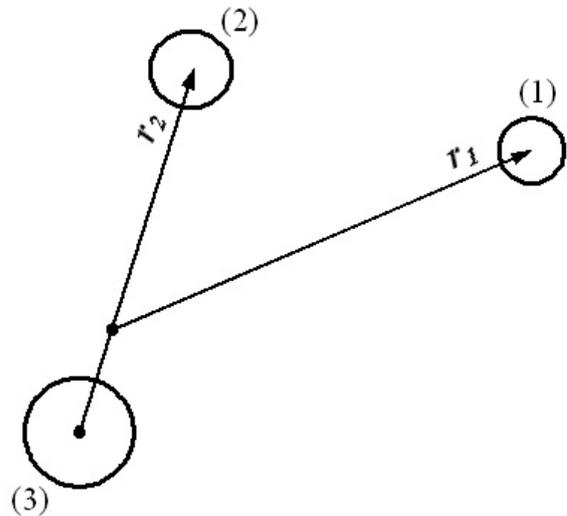


Рис. 1. Система координат Якоби для многонуклонной системы из трех фрагментов. Вектор  $r_1$  соединяет центр масс фрагмента 1 с центром масс остальных фрагментов,  $r_2$  соединяет центр масс фрагмента 2 с центром масс фрагмента 3.

Для каждого слагаемого антисимметризатора правой функции в формуле (2)  $H_k$  можно выразить в координатах Якоби, соответствующих те-

кущей расстановке нуклонов по состояниям системы. Воздействие такого оператора на волновую функцию канала  $k$  по определению приводит просто к умножению на суммарную внутреннюю энергию фрагментов канала. Прделав эту процедуру для всех каналов, преобразуя конечный результат к исходной в каждом случае системе координат, можно получить

$$|N - E | \Psi \rangle = \sum_k A_e \prod_{n=1}^{\phi(k)} \Phi_{nk}(\xi_{nk}) |T_k + V_k - E_k | F_k(\{\bar{r}_k\}) \rangle, \quad (5)$$

$$\int \sum_{pq} F_p^+(\{\bar{r}_p\}) \prod_{v=1}^{\phi(p)} \Phi_{vp}^+(\xi_{vp}) A_e \prod_{n=1}^{\phi(q)} \Phi_{nq}(\xi_{nq}) (T_q + V_q - E_q) F_q(\{\bar{r}_q\}) J_p d\{\xi_{\phi(p)}\} d\{\bar{r}_p\}. \quad (6)$$

Интегрирование идет по  $A - \phi(p)$  элементам объема пространственных векторных составляющих координат  $\xi_{vp}$  и  $\phi(p) - 1$  элементам объема координат  $\bar{r}_p$ .  $J_p = \frac{D(\{\bar{r}_j^{(A)}\})}{D(\{\xi_{\phi(p)}\}, \{\bar{r}_p\})}$  – якобиан перехода к этим переменным интегрирования от первоначальных переменных  $\bar{r}_j^{(A)}$ . Для каждой пары каналов  $pq$ , которые различаются количеством или массовым числом фрагментов,

$$\int \sum_{pq} F_p^+(\{\bar{r}_p\}) \prod_{v=1}^{\phi(p)} \Phi_{vp}^+(\xi'_{vp}) A_e \prod_{n=1}^{\phi(q)} \Phi_{nq}(\xi_{nq}) (T_q + V_q - E_q) F_q(\{\bar{r}_q\}) J_p J_{qp} d\{\xi'_{\phi(p)}\} d\{\bar{r}_p\} d\{\bar{r}_q\} + \\ + \int \sum_{\substack{pq \\ (p \sim q)}} F_p^+(\{\bar{r}_p\}) \prod_{v=1}^{\phi(p)} \Phi_{vp}^+(\xi_{vp}) \prod_{n=1}^{\phi(q)} \Phi_{nq}(\xi_{nq}) (T_q + V_q - E_q) F_q(\{\bar{r}_p\}) J_p d\{\xi_{\phi(p)}\} d\{\bar{r}_p\}. \quad (7)$$

Вторая сумма существует в случае, когда массовые числа фрагментов в каналах  $p$  и  $q$  одинаковы (это условно обозначено  $p \sim q$  под знаком суммы) и расположение нуклонов по состояниям системы в обоих каналах исходное. Если  $p \neq q$  и хотя бы один из каналов содержит более двух фрагментов, а в наборе  $\{A_i\}$  канала  $p$  есть хотя бы два таких же значения, как в наборе  $\{A_i\}$  канала  $q$ , то суммы сходного типа появляются также для определенных слагаемых антисимметризатора в формуле (6). Общее рассмотрение таких особых случаев – отдельная громоздкая задача, на данном этапе имеет смысл условно считать, что они также представлены второй суммой, и учитывать их после конкретизации каналов  $pq$ . Первая сумма присутствует только в случае, когда не существует вторая. Штрих у переменных

здесь  $E_k$  – суммарная энергия относительного движения фрагментов канала  $k$ . Для вычисления выражения (2) этот результат нужно умножить слева на  $\Psi^+$  в представлении (1) после чего проинтегрировать по пространству задачи, образованному  $A - 1$  независимыми координатами  $\bar{r}_j^{(A)}$ .

Преобразовав интеграл к координатам Якоби, соответствующим исходной расстановке нуклонов по состояниям в левой функции, можно записать формулу (2) в виде

в формуле (6) можно с помощью линейного преобразования выразить  $\phi(q) - 1$  переменную интегрирования  $\xi_{vp}$  через остальные  $\xi_{vp}$  и  $\phi(q) - 1$  переменную  $\{\bar{r}_q\}$ . Точно такое же преобразование возможно и в случае других пар  $pq$  (включая  $p = q$ ) для всех слагаемых антисимметризатора в формуле (6) кроме одного, которое сохраняет исходное расположение нуклонов. С учетом изложенного выражение (6) можно представить как

первого интеграла  $\xi'_{vp}$  означает, что в некоторых слагаемых антисимметризатора их нумерация по первому индексу может отличаться от нумерации в исходном наборе  $\xi_{vp}$ . Переменные  $\xi$  для  $\Phi_{vp}, \Phi_{nq}, V_q$  выражаются через набор переменных интегрирования посредством линейного преобразования. Якобиан  $J_{qp}$  возникает при переходе от переменных интегрирования формулы (6) к переменным первого интеграла в выражении (7). Вследствие линейности преобразования переменных этот якобиан, как и  $J_p$ , является просто числом, выражающимся через набор  $\{A_p\}$  и  $\{A_q\}$ . Удобно переписать выражение (7) в виде

$$\int \sum_{pq} F_p^+(\{\bar{r}_p\}) \left[ N_{pq}(\{\bar{r}_p\}, \{\bar{r}_q\}) (T_q - E_q) + U_{pq}(\{\bar{r}_p\}, \{\bar{r}_q\}) \right] F_q(\{\bar{r}_q\}) d\{\bar{r}_p\} d\{\bar{r}_q\} + \\ + \int \sum_{\substack{pq \\ (p \sim q)}} F_p^+(\{\bar{r}_p\}) \left[ O_{pq}(\{\bar{r}_p\}, \{\bar{r}_q\}) (T_q - E_q) + V_{pq}(\{\bar{r}_p\}) \right] F_q(\{\bar{r}_p\}) d\{\bar{r}_p\}. \quad (8)$$

Здесь

$$N_{pq}(\{\bar{r}_p\}, \{\bar{r}_q\}) = J_p J_{qp} \int \prod_{v=1}^{\phi(p)} \Phi_{vp}^+(\xi'_{vp}) A_e \prod_{n=1}^{\phi(q)} \Phi_{nq}(\xi_{nq}) d\{\xi'_{\phi(p)}\}, \quad (9)$$

$$U_{pq}(\{\bar{r}_p\}, \{\bar{r}_q\}) = J_p J_{qp} \int \prod_{v=1}^{\phi(p)} \Phi_{vp}^+(\xi'_{vp}) A_e \prod_{n=1}^{\phi(q)} \Phi_{nq}(\xi_{nq}) V_q d\{\xi'_{\phi(p)}\}, \quad (10)$$

$$O_{pq}(\{\bar{r}_p\}, \{\bar{r}_q\}) = J_p \int \prod_{v=1}^{\phi(p)} \Phi_{vp}^+(\xi_{vp}) \prod_{n=1}^{\phi(q)} \Phi_{nq}(\xi_{nq}) d\{\xi'_{\phi(p)}\}, \quad (11)$$

$$V_{pq}(\{\bar{r}_p\}, \{\bar{r}_q\}) = J_p \int \prod_{v=1}^{\phi(p)} \Phi_{vp}^+(\xi_{vp}) V_q \prod_{n=1}^{\phi(q)} \Phi_{nq}(\xi_{nq}) d\{\xi'_{\phi(p)}\}. \quad (12)$$

Аргументы  $O_{pq}$  и  $V_{pq}$  в формулах (11), (12) даны условно, они представлены неполными наборами  $\{\bar{r}_p\}$ ,  $\{\bar{r}_q\}$ , с учетом свойств второй суммы в формулах (7), (8). Набор переменных интегрирования для них также неполон, суммарное число аргументов левой части и переменных интегрирования должно быть равно  $A-1$  для каждого из выражений (11), (12). При  $p = q$   $O_{pq}$  является произведением нормировочных множителей фрагментов канала  $p$ .  $V_{pq}(\{\bar{r}_p\})$  – потенциал взаимодействия всех фрагментов в канале  $q$ , зависит только от расстояния между этими фрагментами и поэтому не чувствителен к выбору варианта координат Якоби.

Путем минимизации функционала (8) вариационным методом можно найти функции

$$\begin{aligned} & \int \sum_q F_q(\{\bar{r}_q\}) \left[ (T_q - E_q) N_{jq}(\{\bar{r}_j\}, \{\bar{r}_q\}) + (T_j - E_j) N_{qj}(\{\bar{r}_q\}, \{\bar{r}_j\}) \right] d\{\bar{r}_q\} + \\ & + \int \sum_q F_q(\{\bar{r}_q\}) \left[ U_{jq}(\{\bar{r}_j\}, \{\bar{r}_q\}) + U_{qj}(\{\bar{r}_q\}, \{\bar{r}_j\}) \right] d\{\bar{r}_q\} + \int \sum_{\substack{q \\ (q \sim j)}} \left[ O_{jq}(\{\bar{r}_j\}, \{\bar{r}_q\}) (T_j - E_q) + \right. \\ & \left. + O_{qj}(\{\bar{r}_q\}, \{\bar{r}_j\}) (T_j - E_j) \right] F_q(\{\bar{r}_q\}) d\{\bar{r}_j\} + \int \sum_q \left[ V_{jq}(\{\bar{r}_j\}, \{\bar{r}_q\}) + V_{qj}(\{\bar{r}_q\}, \{\bar{r}_j\}) \right] F_q(\{\bar{r}_q\}) d\{\bar{r}_q\} = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Полное число уравнений системы равно числу учитываемых каналов  $n_c$ .  $j$  – текущий номер уравнения,  $1 \leq j \leq n_c$ . Система интегродифференциальных уравнений (13) в дальней асимптотике (т.е. в области, где  $\{|\bar{r}_j|\} \rightarrow \infty$  и одновременно  $\{|\bar{r}_q|\} \rightarrow \infty$ ) переходит в систему дифференциальных уравнений второго порядка в силу того, что интегральные ядра здесь стремятся к нулю. Короткодействующая ядерная составляющая нуклон-нуклонного потенциала (ННП) в этой области для взаимодействия фрагментов также зануляется, и вид решения определяет только кулоновское взаимодействие фрагментов.

$F_p(\{\bar{r}_p\})$ . Вариационное исчисление обычно рассматривает скалярные функции скалярных переменных, но развитые для таких случаев методы вполне приложимы и в случае векторных аргументов функций, если скалярные дифференциальные операторы заменить операторами векторного дифференцирования. Функция  $F_p(\{\bar{r}_p\})$  является комплексной, но в силу эрмитовости гамильтониана в этом случае [7] достаточно варьировать ее действительную часть. Применяя описанные в курсах вариационного исчисления процедуры (см. [8]) для действительной части  $F_p(\{\bar{r}_p\})$  и сохраняя с целью упрощения записи для нее это обозначение, можно получить систему уравнений Эйлера:

Построение внешних кулоновских решений, их сшивка с внутренними решениями выполняется почти всегда в сферических координатах. Связанные с этим вопросы рассматриваются далее.

### Система уравнений резонирующих групп в сферических координатах

К сферическим координатам удобно перейти уже в функционале (8). При этом функции  $F_q(\{\bar{r}_q\})$  раскладываются по собственным функциям оператора полного углового момента системы  $\phi(q)$  фрагментов, после чего берется интеграл по угловым переменным  $\{\hat{r}_p\}$  и  $\{\hat{r}_q\}$  и далее

выполняется суммирование по проекциям угловых моментов. При большом числе фрагментов эта громоздкая задача добавочно усложняется большим числом возможных промежуточных значений спина канала, для каждого из которых, вообще, существует отдельное уравнение. В качестве примера ниже рассматривается система уравнений для простейшего случая, когда в расчет включаются только упругий канал и трехтельный канал, образуемый распадом одного из фрагментов канала рассеяния. Для уменьшения громоздкости конечных выражений предполагается, что ННП содержит только центральное взаимодействие – в этом случае состояния с разным значением спина канала не перемешиваются друг с другом. С этой же целью, чтобы получить хотя бы начальную грубую оценку физического значения трехтельного канала, здесь считался актуальным только один вариант координат Якоби – изображенный на рис. 1. Этот выбор подкреплен тем обстоятельством, что только в этом случае отличны от нуля величины  $O_{pq}$ , обеспечивающие прямой механизм связи двухтельного канала с трехтельным (см. комментарий к формуле (7)). В итоге систему необходимо ре-

шать при каждом возможном состоянии полного углового момента  $JM$  и четности  $\pi$  для всех наборов значений спина  $\{I_q\}$  в каждом из каналов. В двухтельном канале  $J$  образуется сложением орбитального момента относительного движения фрагментов  $l_1$  со спином канала  $I^{(2)}$ , коэффициенты разложения соответствующей функции  $F_q(\vec{r}_1)$  по собственным функциям  $JM\pi$  обозначим  $f_{l_1}^{(2)}(r_1)$ . В трехтельном канале  $J$  образуется сложением двух орбитальных моментов относительного движения фрагментов по схеме рис. 1 со спином канала  $I^{(3)}$ , коэффициенты разложения трехтельной функции  $F_q(\vec{r}_1)$  по собственным функциям  $JM\pi$  обозначим  $f_{l_1 l_2}^{(3)}(r_1, r_2)$ . Выразив функции  $F$  в формуле (8) через функции  $g_{l_1}^{(2)}(r_1) = r_1 f_{l_1}^{(2)}(r_1)$ ,  $g_{l_1 l_2}^{(3)}(r_1, r_2) = r_1 r_2 f_{l_1 l_2}^{(3)}(r_1, r_2)$ , после интегрирования по  $\hat{r}_1$  и  $\hat{r}_2$  и суммирования по проекциям в каждом состоянии  $JM\pi I^{(2)} I^{(3)}$  из функционала (8) с помощью стандартных вариационных процедур [8] можно получить систему, состоящую из уравнений Эйлера двух типов. Уравнения первого типа дает формула (14).

$$\begin{aligned}
 & 2O^{(2)} \left[ -\frac{\hbar^2}{2\mu_1} \frac{d^2}{dr_1^2} + \frac{\hbar^2}{2\mu_1} \frac{l_1(l_1+1)}{r_1^2} - E^{(2)} \right] g_{l_1}^{(2)}(r_1) + \sum_{l'_1} \left[ V_{l'_1 l_1}^{(22)}(r_1) + V_{l_1 l'_1}^{(22)}(r_1) \right] g_{l'_1}^{(2)}(r_1) + \\
 & + r_1 \int dr'_1 r'_1 \sum_{l'_1} \left\{ -\frac{\hbar^2}{2\mu_1} \left[ \frac{\partial^2}{\partial r_1'^2} N_{l'_1 l_1}^{(22)}(r_1, r'_1) \right] - \frac{\hbar^2}{2\mu_1} \left[ \frac{\partial^2}{\partial r_1'^2} N_{l_1 l'_1}^{(22)}(r'_1, r_1) \right] + N_{l'_1 l_1}^{(22)}(r_1, r'_1) \left[ \frac{\hbar^2}{2\mu_1} \frac{l'_1(l'_1+1)}{r_1'^2} - \right. \right. \\
 & \left. \left. - E^{(2)} \right] + N_{l_1 l'_1}^{(22)}(r'_1, r_1) \left[ \frac{\hbar^2}{2\mu_1} \frac{l_1(l_1+1)}{r_1^2} - E^{(2)} \right] + U_{l'_1 l_1}^{(22)}(r_1, r'_1) + U_{l_1 l'_1}^{(22)}(r'_1, r_1) \right\} g_{l'_1}^{(2)}(r'_1) - \\
 & - \frac{\hbar^2}{\mu_1} \int dr'_1 \sum_{l'_1} \left\{ r'_1 \left[ \frac{\partial}{\partial r_1} N_{l'_1 l_1}^{(22)}(r'_1, r_1) \right] + r_1 \left[ \frac{\partial}{\partial r_1'} N_{l_1 l'_1}^{(22)}(r_1, r'_1) \right] \right\} g_{l'_1}^{(2)}(r'_1) + \int dr_2 r_2 \left\{ O^{(32)}(r_2) \times \right. \\
 & \times \left[ -\frac{\hbar^2}{2\mu_1} \frac{\partial^2}{\partial r_1^2} + \frac{\hbar^2}{2\mu_1} \frac{l_1(l_1+1)}{r_1^2} - E^{(2)} \right] + O_{l_2=0}^{(23)}(r_2) \left[ -\frac{\hbar^2}{2\mu_1} \frac{\partial^2}{\partial r_1^2} + \frac{\hbar^2}{2\mu_1} \frac{l_1(l_1+1)}{r_1^2} + \right. \\
 & \left. + \frac{\hbar^2}{2\mu_2} \frac{l_2(l_2+1)}{r_2^2} - E^{(3)} \right] - \frac{\hbar^2}{2\mu_2} \left[ \frac{\partial^2}{\partial r_2^2} O_{l_2=0}^{(23)}(r_2) \right] - \frac{\hbar^2}{\mu_2} \left[ \frac{1}{r_2} \frac{\partial}{\partial r_2} O_{l_2=0}^{(23)}(r_2) \right] \left. \right\} g_{l_1 l_2=0}^{(3)}(r_1, r_2) + \\
 & + \int dr_2 r_2 \sum_{l'_1 l'_2} \left[ V_{l'_1 l'_2}^{(32)}(r_1, r_2) + V_{l_1 l_2}^{(23)}(r_1, r_2) \right] g_{l'_1 l'_2}^{(3)}(r_1, r_2) + r_1 \int dr'_1 dr'_2 r'_1 r'_2 \sum_{l'_1 l'_2} \left\{ N_{l'_1 l'_2}^{(23)}(r_1, r'_1, r'_2) \times \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \left[ \frac{\hbar^2}{2\mu_1} \frac{l'_1(l'_1+1)}{r_1'^2} + \frac{\hbar^2}{2\mu_2} \frac{l'_2(l'_2+1)}{r_2'^2} - E^{(3)} \right] - \frac{\hbar^2}{2\mu_2} \left[ \frac{\partial^2}{\partial r_2'^2} N_{l'_1 l'_2}^{(23)}(r_1, r_1', r_2') \right] - \\
 & - \frac{\hbar^2}{2\mu_1} \left[ \frac{\partial^2}{\partial r_1'^2} N_{l_1 l_2}^{(23)}(r_1, r_1', r_2') + \frac{\partial^2}{\partial r_1'^2} N_{l_2 l_1}^{(32)}(r_1', r_2', r_1) \right] + N_{l_2 l_1}^{(32)}(r_1', r_2', r_1) \left[ \frac{\hbar^2}{2\mu_1} \frac{l_1(l_1+1)}{r_1^2} - E^{(2)} \right] + \\
 & + U_{l_1 l_2}^{(23)}(r_1, r_1', r_2') + U_{l_2 l_1}^{(32)}(r_1', r_2', r_1) \left\} g_{l_2}^{(3)}(r_1', r_2') - \frac{\hbar^2}{\mu_1} \int dr_1' dr_2' r_2' \sum_{l_2} \left\{ r_1' \left[ \frac{\partial}{\partial r_1} N_{l_2 l_1}^{(32)}(r_1', r_2', r_1) \right] + \right. \right. \\
 & \left. \left. + r_1 \left[ \frac{\partial}{\partial r_1'} N_{l_1 l_2}^{(23)}(r_1, r_1', r_2') \right] \right\} g_{l_2}^{(3)}(r_1', r_2') - \frac{\hbar^2}{\mu_2} r_1 \int dr_1' dr_2' r_1' \sum_{l_2} \left[ \frac{\partial}{\partial r_2'} N_{l_1 l_2}^{(23)}(r_1, r_1', r_2') \right] g_{l_2}^{(3)}(r_1', r_2') = 0 \quad (14)
 \end{aligned}$$

Интегральные ядра  $N_{l_1 l_1'}^{(22)}(r_1, r_1')$  здесь – проекция ядер (9) на состояние  $J\pi I^{(2)}$  с  $l_1$  и одновременно на состояние  $J\pi I^{(2)}$  с  $l_1'$  для случая, когда индекс  $p$  и  $q$  в формуле (9) обозначает двутельный канал.  $N_{l_1 l_2}^{(23)}(r_1, r_1', r_2')$  – проекция (9) на состояние  $J\pi I^{(2)}$  с  $l_1$  и одновременно на состояние  $J\pi I^{(3)}$  с  $l_1' l_2'$ , если канал  $p$  в формуле (9) – двутельный, а канал  $q$  – трехтельный. Подобным же образом  $N_{l_1 l_2 l_1'}^{(32)}(r_1, r_2, r_1')$  – проекция ядра (9) если  $p$  – трехтельный канал, а  $q$  – двутельный и  $N_{l_1 l_2 l_2'}^{(33)}(r_1, r_2, r_1', r_2')$  соответствует трех-

тельным  $p$  и  $q$ . Такая же система обозначений действует для интегральных ядер взаимодействия  $U$  на основе формулы (10). Потенциалы  $V_{l_1 l_1'}^{(22)}(r_1)$  здесь – проекция ядер (12) на состояние  $J\pi I^{(2)}$  с  $l_1$  и одновременно на  $J\pi I^{(2)}$  с  $l_1'$  для случая двутельных каналов  $p$  и  $q$ .  $V_{l_1 l_2}^{(23)}(r_1, r_2)$  – такая же проекция для трехтельного канала  $q$ . Аналогично  $V_{l_1 l_2 l_1'}^{(32)}(r_1, r_2)$  соответствует ядру (12), если  $p$  – трехтельный канал, а  $q$  – двутельный и  $V_{l_1 l_2 l_2'}^{(33)}(r_1, r_2)$  соответствует трехтельным  $p$  и  $q$ .

$$\begin{aligned}
 & \delta_{l_2 0} r_2 \left\{ O^{(32)}(r_2) \left[ -\frac{\hbar^2}{2\mu_1} \frac{d^2}{dr_1^2} + \frac{\hbar^2}{2\mu_1} \frac{l_1(l_1+1)}{r_1^2} - E^{(2)} \right] + O_{l_2}^{(23)}(r_2) \left[ -\frac{\hbar^2}{2\mu_1} \frac{d^2}{dr_1^2} + \frac{\hbar^2}{2\mu_1} \frac{l_1(l_1+1)}{r_1^2} - E^{(3)} \right] - \right. \\
 & - \frac{\hbar^2}{2\mu_2} \left[ \frac{d^2}{dr_2^2} O_{l_2}^{(23)}(r_2) \right] - \frac{\hbar^2}{\mu_2} \left[ \frac{1}{r_2} \frac{d}{dr_2} O_{l_2}^{(23)}(r_2) \right] \left\} g_{l_1}^{(2)}(r_1) + r_2 \sum_{l_1'} \left[ V_{l_1 l_2 l_1'}^{(32)}(r_1, r_2) + V_{l_1 l_2 l_2}^{(23)}(r_1, r_2) \right] g_{l_1}^{(2)}(r_1) + \\
 & + r_1 r_2 \int dr_1' r_1' \sum_{l_1} \left\{ N_{l_1 l_2 l_1'}^{(32)}(r_1, r_2, r_1') \left[ \frac{\hbar^2}{2\mu_1} \frac{l_1'(l_1'+1)}{r_1'^2} - E^{(2)} \right] - \frac{\hbar^2}{2\mu_1} \left[ \frac{\partial^2}{\partial r_1'^2} N_{l_1 l_2}^{(23)}(r_1', r_1, r_2) \right] - \right. \\
 & - \frac{\hbar^2}{2\mu_1} \left[ \frac{\partial^2}{\partial r_1'^2} N_{l_1 l_2 l_1'}^{(32)}(r_1, r_2, r_1') \right] + N_{l_1 l_2}^{(23)}(r_1', r_1, r_2) \left[ \frac{\hbar^2}{2\mu_1} \frac{l_1(l_1+1)}{r_1^2} + \frac{\hbar^2}{2\mu_2} \frac{l_2(l_2+1)}{r_2^2} - E^{(3)} \right] - \\
 & - \frac{\hbar^2}{2\mu_2} \left[ \frac{\partial^2}{\partial r_2'^2} N_{l_1 l_2}^{(23)}(r_1', r_1, r_2) \right] + \left[ U_{l_1 l_2 l_1'}^{(32)}(r_1, r_2, r_1') + U_{l_1 l_2}^{(23)}(r_1', r_1, r_2) \right] \left\} g_{l_1}^{(2)}(r_1) - \frac{\hbar^2}{\mu_1} r_2 \int dr_1' \sum_{l_1} \left\{ r_1' \times \right. \\
 & \times \left[ \frac{\partial}{\partial r_1} N_{l_1 l_2}^{(23)}(r_1', r_1, r_2) \right] + r_1 \left[ \frac{\partial}{\partial r_1'} N_{l_1 l_2}^{(32)}(r_1, r_2, r_1') \right] \left\} g_{l_1}^{(2)}(r_1) - \frac{\hbar^2}{\mu_2} r_1 \int dr_1' r_1' \sum_{l_1} \left[ \frac{\partial}{\partial r_2} N_{l_1 l_2}^{(23)}(r_1', r_1, r_2) \right] g_{l_1}^{(2)}(r_1) + \right. \\
 & \left. + 2O^{(3)} \left[ -\frac{\hbar^2}{2\mu_1} \frac{\partial^2}{\partial r_1^2} - \frac{\hbar^2}{2\mu_2} \frac{\partial^2}{\partial r_2^2} + \frac{\hbar^2}{2\mu_1} \frac{l_1(l_1+1)}{r_1^2} + \frac{\hbar^2}{2\mu_2} \frac{l_2(l_2+1)}{r_2^2} - E^{(3)} \right] g_{l_2}^{(3)}(r_1, r_2) + \sum_{l_1 l_2'} \left[ V_{l_1 l_2 l_2'}^{(33)}(r_1, r_2) + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +V_{l_1' l_2' l_1 l_2}^{(33)}(r_1, r_2) \left] g_{l_1' l_2'}^{(3)}(r_1) + r_1 r_2 \int dr_1' dr_2' r_1' r_2' \sum_{l_1' l_2'} \left\{ N_{l_1' l_2' l_1 l_2}^{(33)}(r_1', r_2', r_1, r_2) \left[ \frac{\hbar^2 l_1(l_1+1)}{2\mu_1 r_1^2} + \frac{\hbar^2 l_2(l_2+1)}{2\mu_2 r_2^2} - \right. \right. \\
 & \left. \left. - E^{(3)} \right] + N_{l_1' l_2' l_1' l_2'}^{(33)}(r_1, r_2, r_1', r_2') \left[ \frac{\hbar^2 l_1'(l_1'+1)}{2\mu_1 r_1'^2} + \frac{\hbar^2 l_2'(l_2'+1)}{2\mu_2 r_2'^2} - E^{(3)} \right] + U_{l_1' l_2' l_1' l_2'}^{(33)}(r_1, r_2, r_1', r_2') + \right. \\
 & \left. + U_{l_1' l_2' l_1 l_2}^{(33)}(r_1', r_2', r_1, r_2) - \frac{\hbar^2}{2\mu_1} \left[ \frac{\partial^2}{\partial r_1'^2} N_{l_1' l_2' l_1 l_2}^{(33)}(r_1', r_2', r_1, r_2) \right] - \frac{\hbar^2}{2\mu_1} \left[ \frac{\partial^2}{\partial r_1'^2} N_{l_1' l_2' l_1' l_2'}^{(33)}(r_1, r_2, r_1', r_2') \right] - \right. \\
 & \left. - \frac{\hbar^2}{2\mu_2} \left[ \frac{\partial^2}{\partial r_2'^2} N_{l_1' l_2' l_1 l_2}^{(33)}(r_1', r_2', r_1, r_2) \right] - \frac{\hbar^2}{2\mu_2} \left[ \frac{\partial^2}{\partial r_2'^2} N_{l_1' l_2' l_1' l_2'}^{(33)}(r_1, r_2, r_1', r_2') \right] \right\} g_{l_1' l_2'}^{(3)}(r_1', r_2') - \\
 & - \frac{\hbar^2}{\mu_1} r_2 \int dr_1' dr_2' r_2' \sum_{l_1' l_2'} \left\{ r_1' \left[ \frac{\partial}{\partial r_1'} N_{l_1' l_2' l_1 l_2}^{(33)}(r_1', r_2', r_1, r_2) \right] + r_1 \left[ \frac{\partial}{\partial r_1'} N_{l_1' l_2' l_1' l_2'}^{(33)}(r_1, r_2, r_1', r_2') \right] \right\} g_{l_1' l_2'}^{(3)}(r_1', r_2') - \\
 & - \frac{\hbar^2}{\mu_2} r_1 \int dr_1' dr_2' r_1' \sum_{l_1' l_2'} \left\{ r_2' \left[ \frac{\partial}{\partial r_2'} N_{l_1' l_2' l_1 l_2}^{(33)}(r_1', r_2', r_1, r_2) \right] + r_2 \left[ \frac{\partial}{\partial r_2'} N_{l_1' l_2' l_1' l_2'}^{(33)}(r_1, r_2, r_1', r_2') \right] \right\} g_{l_1' l_2'}^{(3)}(r_1', r_2') = 0. \quad (15)
 \end{aligned}$$

$O^{(2)}$  и  $O^{(3)}$  даются формулой (11) при  $p = q$  для случая, когда оба канала двутельные или трехтельные соответственно. За счет должной нормировки базисных функций оба этих числа можно сделать равными единице. Если каналы  $p$  и  $q$  разные, то результат (11) зависит от  $\vec{r}_2$ , его проекции на  $JM\pi I^{(2)}I^{(3)}$  с  $l_2$  обозначены  $O_{l_2}^{(23)}(r_2)$  и  $O_{l_2}^{(32)}(r_2)$ . Потенциалы  $V$  получаются из исходного выражения (12) с помощью описанных выше процедур, с учетом комментария к (7).  $E^{(2)}$  и  $E^{(3)}$  – энергия относительного движения фрагментов в двутельном и трехтельном канале соответственно.

Второй тип полученных уравнений Эйлера представляет формула (15). В ней, как и в формуле (14), обменная составляющая кинетической энергии представлена через дифференцирование интегральных ядер  $N$ . В результате математических преобразований, необходимых для перехода к этому представлению от исходного, в котором дифференцируются функции  $g_{l_1}^{(2)}(r_1)$  и  $g_{l_1 l_2}^{(3)}(r_1, r_2)$ , появляются слагаемые с первой производной ядер  $N$ . Такая форма уравнений оказывается более удобной при численном решении системы. Отметим, что для реакций с только двутельными каналами система будет целиком состоять из уравнений типа (14), из которых удалены слагаемые с множителем  $g_{l_1 l_2}^{(3)}(r_1, r_2)$ .

Общее решение системы (14), (15) образуется линейной комбинацией базисных решений, полученных с линейно-независимыми наборами краевых значений первых производных функций  $g_{l_1}^{(2)}(r_1)$ ,  $g_{l_1 l_2}^{(3)}(r_1, r_2)$  в области малых значений  $r_1, r_2$ , как обычно для случая связанных каналов [9]. Чтобы получить матрицу столкновений, логарифмические производные внутренних решений необходимо на границе внутренней области пространства задачи сшить с соответствующими величинами, построенными из внешних, кулоновских  $g_{l_1}^{(2)}(r_1)$ ,  $g_{l_1 l_2}^{(3)}(r_1, r_2)$ .

#### Пример расчета: рассеяние ${}^6\text{Li}(\alpha, \alpha){}^6\text{Li}$ в присутствии прямого развала ${}^6\text{Li} \rightarrow d + \alpha$

Общее представление об одном из практических методов решения задач рассматриваемого типа и возникающих при этом проблемах можно получить на примере расчета дифференциальных сечений упругого рассеяния  ${}^4\text{He}$  ( $E_{c.m.} = 17,6$  МэВ) на  ${}^6\text{Li}$  в присутствии трехчастичного канала, связанного с прямым развалом  ${}^6\text{Li} \rightarrow d + \alpha$ . Такой механизм не требует антисимметризации волновой функции задачи относительно нуклонных перестановок между фрагментами канала, вследствие чего в уравнениях (14), (15) отсутствуют слагаемые, содержащие  $r_1'$  и  $r_2'$ , исчезают интегральные ядра  $N$  и  $U$  и уравнения (15) уже не содержат интегральной части. В ито-

ге должно усиливаться относительное влияние прямых составляющих системы (14), (15), что дополнительно подкрепляет принятый вариант трехтельных координат Якоби, в основном формирующий эти слагаемые системы. Для спинов обоих каналов здесь возможно единственное значение  $I=1$ . Волновые функции фрагментов канала строятся по оболочечной модели с осцилляторным потенциалом, как описано в [10, 11]. Для структуры  ${}^6\text{Li}$  и  ${}^2\text{H}$  учитывается только до-

минирующее оболочечное состояние с  $L=0$ ,  $S=1$ . Коэффициенты системы (14), (15) в конечном счете являются линейной комбинацией матричных элементов перехода между всеми возможными состояниями фрагментов канала, входящими в формулы (9 - 12). Благодаря осцилляторной форме оболочечного потенциала эти коэффициенты имеют простую математическую форму. Для ядер перекрытия вычисления дают

$$O^{(32)}(r_2) = \langle \Phi_{13}\Phi_{23}\Phi_{33} | \Phi_{12}\Phi_{22} \rangle = e^{-\beta r_2^2} \sum_{i=1}^2 \gamma_i r_2^{2(i-1)}, \quad (16)$$

$$O^{(23)}(r_2) = \langle \Phi_{12}\Phi_{22} | \Phi_{13}\Phi_{23}\Phi_{33} \rangle = e^{-\beta r_2^2} \sum_{i=1}^2 \varepsilon_i r_2^{2(i-1)}, \quad (\beta > 0).$$

Здесь  $\gamma_i, \varepsilon_i$  – числовые коэффициенты, индекс упругого канала 2, трехтельного – 3. Выражения (16) не зависят от угловых переменных и поэтому их вид одинаков при всех  $JM\pi$ . Общая форма потенциалов (12) для случая гауссовской зависимости слагаемых ННП от межнуклонного расстояния получается следующей:

$$V_{22}(r_1, \hat{r}_1) = \langle \Phi_{12}\Phi_{22} | V_2 | \Phi_{12}\Phi_{22} \rangle =$$

$$= \sum_{ik} e^{-a_i r_1^2} w_k^{(22)} r_1^{n_1(k)} Y_{\lambda_1(k)\nu_1(k)}(\hat{r}_1), \quad (17)$$

$a_i > 0$ , условие  $0 < n_1(k) \leq 4$  ограничивает значения четных чисел  $n_1(k)$ . Аналогично для четных  $\lambda_1(k)$   $0 < \lambda_1(k) \leq 4$ ;  $w_k$  с индексами каналов вверху здесь и далее – расчетные числовые коэффициенты. Потенциалы в формуле (14) при этом

$$V_{11}^{(22)}(r_1) = (-1)^{I+J} \sqrt{2J+1} \times$$

$$\times \sum_i e^{-a_i r_1^2} \sqrt{(2I_1+1)(2I_1'+1)} \sum_k w_k^{(22)} r_1^{n_1(k)} \delta_{\nu_1(k)0} C_{I_1 0 I_1' 0}^{\lambda_1(k)0} C_{JM \lambda_1(k)0}^{JM} \left\{ \begin{matrix} I_1' & I & J \\ J & \lambda_1(k) & I_1 \end{matrix} \right\}. \quad (18)$$

Для  $V_{32}$  расчет по формуле (12) дает

$$V_{32}(r_1, r_2, \hat{r}_1, \hat{r}_2) = \langle \Phi_{13}\Phi_{23}\Phi_{33} | V_2 | \Phi_{12}\Phi_{22} \rangle =$$

$$= \sum_{ik\lambda\nu} e^{-a_i r_1^2 - b_i r_2^2} w_k^{(32)} r_1^{n_1(k)} r_2^{n_2(k)} h_\lambda(c_i r_1 r_2) Y_{\lambda_1(k)\nu_1(k)}(\hat{r}_1) Y_{\lambda_2(k)\nu_2(k)}(\hat{r}_2) Y_{\lambda\nu}^*(\hat{r}_1) Y_{\lambda\nu}(\hat{r}_2), \quad (19)$$

$a_i > 0, b_i > 0, 0 < n_1(k) \leq 2, 0 < n_2(k) \leq 2, 0 < \lambda_1(k) \leq 2, 0 < \lambda_2(k) \leq 2$ . Здесь использовано разложение  $e^{c_i(\hat{r}_1 \hat{r}_2)} = \sum_{\lambda\nu} h_\lambda(c_i r_1 r_2) Y_{\lambda\nu}^*(\hat{r}_1) Y_{\lambda\nu}(\hat{r}_2)$ . Для  $V_{23}(r_1, r_2, \hat{r}_1, \hat{r}_2) = \langle \Phi_{12}\Phi_{22} | V_3 | \Phi_{13}\Phi_{23}\Phi_{33} \rangle$  расчеты дают ту же форму, но с другими значениями  $a_i, b_i, c_i, w_k^{(23)}$ . Проекция на состояния  $JM\pi$  определяет коэффициенты для формул (14), (15):

$$V_{11}^{(32)}(r_1, r_2) = \sum_{ik\lambda} e^{-a_i r_1^2 - b_i r_2^2} w_k^{(32)} r_1^{n_1(k)} r_2^{n_2(k)} h_\lambda(c_i r_1 r_2) \times$$

$$\times \sum_{ILs} (-1)^{I+l'+\nu_2(k)} C_{\lambda_1(k)0 I_1'0}^{I0} C_{\lambda_2(k)0 I_2'0}^{L0} C_{\lambda 0 I_1 0}^{I0} \left\{ \begin{matrix} \lambda & I_1 & I \\ L & \lambda_2(k) & I_2 \end{matrix} \right\} (2\lambda+1)(2J+1)(2s+1) \times$$

$$\times \sqrt{(2L+1)(2I_1+1)(2I_1'+1)} C_{JM s-M-\nu_1(k)}^{\lambda_1(k)-\nu_1(k)} C_{JM s\nu_2(k)-M}^{\lambda_2(k)\nu_2(k)} \left\{ \begin{matrix} I & L & \lambda_2(k) \\ J & s & I \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} I & I_1' & \lambda_1(k) \\ J & s & I \end{matrix} \right\}. \quad (20)$$

Замена в формуле (20) двух последних коэффициентов Клебша - Гордана на  $C_{JM s \nu_1(k)-M}^{\lambda_1(k)\nu_1(k)} C_{JM s -\nu_2(k)-M}^{\lambda_2(k)-\nu_2(k)}$  приводит к выражению для  $V_{l_1 l_2}^{(23)}(r_1, r_2)$ . Рассчитанная параметризованная форма  $V_{33}(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ :

$$V_{l_1 l_2 l'_1 l'_2}^{(33)}(r_1, r_2) = \sum_{ik\lambda L} e^{-a_i r_1^2 - b_i r_2^2} w_k^{(33)} h_\lambda(c_i r_1 r_2) (-1)^{l_1+l'_1-L} \times \sqrt{(2l_1+1)(2l'_1+1)(2l_2+1)(2l'_2+1)} C_{l_1 0 l'_1 0}^{\lambda 0} C_{l_2 0 l'_2 0}^{\lambda 0} \begin{Bmatrix} \lambda & l_1 & l'_1 \\ L & l_2 & l'_2 \end{Bmatrix}. \quad (22)$$

В дальней асимптотике задачи фрагменты канала взаимодействуют как точечные заряды, и слагаемые  $V_{pq}$  приходят к виду  $V_{pq} = V_{pq}^{(\infty)} O_{pq}$ , где  $V_{pq}^{(\infty)}$  – потенциал взаимодействия соответствующих точечных зарядов. Поскольку  $O_{pq}$  с  $p \neq q$  согласно формуле (16) здесь пренебрежимо малы, уравнения (14) и (15) становятся независимыми

$$\left[ -\frac{1}{\mu_1} \frac{\partial^2}{\partial r_1^2} - \frac{1}{\mu_2} \frac{\partial^2}{\partial r_2^2} + \frac{l_1(l_1+1)}{\mu_1 r_1^2} + \frac{l_2(l_2+1)}{\mu_2 r_2^2} - E^{(3)} + \frac{z_2 z_3}{r_2} + \frac{z_1 z_2 + z_1 z_3}{r_1} \right] g_{l_1 l_2}^{(3)}(r_1, r_2) = 0, \quad (23)$$

$z_i$  – заряд соответствующего фрагмента канала. Это уравнение допускает разделение переменных, поэтому его общее решение является произведением обычных двутельных волновых функций Кулона для переменных  $r_1$  и  $r_2$ . В качестве асимптотической формы такого кулоновского решения берется произведение сферических волн для каждой из переменных.

В процессе расчетов прежде всего вычислялся полный набор матричных элементов по формулам (16), (17), (19), (21). Для оболочечных потенциалов фрагментов канала –  $^2\text{H}$ ,  $^4\text{He}$ ,  $^6\text{Li}$  – брались типичные значения осцилляторного радиуса  $b = \sqrt{\hbar/m\omega}$ : 1,367 фм, 1,367 фм, 1,5 фм соответственно. Взаимодействие нуклонов описывалось проекцией модифицированного центрального ННП Волкова V1 [12] на четные состояния относительного движения нуклонной пары. Кулоновская составляющая ННП во внутренней области аппроксимировалась линейной комбинацией шести гауссианов до межнуклонного расстояния 6 фм. По найденному набору вычислялись коэффициенты в формулах (18), (20), (22).

Полученная система из интегродифференциальных уравнений (14) и дифференциальных уравнений (15) решалась численно для всех состояний  $JM\pi$  в интервале ( $0 \leq J \leq 10$ ) обоих

$$V_{33}\{r_1, r_2, \vec{r}_1, \vec{r}_2\} = \langle \Phi_{13} \Phi_{23} \Phi_{33} | V_3 | \Phi_{13} \Phi_{23} \Phi_{33} \rangle = \sum_{ik\lambda\nu} e^{-a_i r_1^2 - b_i r_2^2} w_k^{(33)} h_\lambda(c_i r_1 r_2) Y_{\lambda\nu}^*(\vec{r}_1) Y_{\lambda\nu}(\vec{r}_2). \quad (21)$$

Соответствующие коэффициенты системы уравнений:

друг от друга, что позволяет найти отдельно  $g_{l_1}^{(2)}(r_1)$  и  $g_{l_1 l_2}^{(3)}(r_1, r_2)$  из уравнений (14) и (15) соответственно. Решением уравнения (14) являются известные волновые функции Кулона. Уравнения (15) при  $\frac{\max(A_2, A_3)}{A_2 + A_3} r_2 < r_1$  в начальном грубом приближении можно записать в виде [2]

значений четности. С этой целью двумерное пространство задачи, образуемое переменными  $r_1, r_2$ , дискретизировалось с некоторым, вообще различным по каждой переменной, шагом  $h_1$  и  $h_2$ . Начальной точкой шкалы каждой переменной выбирались достаточно малые числа  $o_1$  и  $o_2$  соответственно. На прямых  $r_1 = o_1$  и  $r_2 = o_2$  задавались краевые значения  $g_{l_1}^{(2)}(r_1)$  и  $g_{l_1 l_2}^{(3)}(r_1, r_2)$ , полученные из соответствующих выражений для свободного движения, а также значения их первых производных. Прямыми  $r_1 = r_{b1}$  и  $r_2 = r_{b2}$  внутренняя область пространства отделялась от внешней, в которой учитывалось только кулоновское взаимодействие фрагментов канала. Рабочая область пространства параметров  $o_1, o_2, h_1, h_2, r_{b1}, r_{b2}$  находилась эмпирически, путем сравнения решений, получаемых с различными наборами этих параметров. Математически устойчивые решения для всех состояний  $JM\pi$  были получены с  $h_1 = 0,1$  фм,  $h_2 = 0,12$  фм,  $r_{b1} = r_{b2} = 6$  фм. Величины  $o_1, o_2$  выбирались в пределах от одной сотой до одной десятой соответствующего шага. Значения радиусов сшивки, вероятно, могут быть недостаточными, но современные технические возмож-

ности вычислений не позволяют их увеличить в рамках разумного времени счета. Внутренняя область пространства при этом состоит из 3000 точек. Система (14), (15) в результате сводится к системе 3060 линейных уравнений с таким же числом неизвестных для  $J^\pi$ , допускающих одно значение  $l_i$  ( $0^-, 1^-, 2^+, 3^-, \dots$ ). Для остальных  $J^\pi$  ( $1^+, 2^-, 3^+, 4^-, \dots$ ) число уравнений и неизвестных удваивается. По определенным из сшивки логарифмических производных внутренних и внешних решений элементам матрицы столкновений стандартным образом рассчитаны дифференциальные сечения упругого рассеяния  $d\sigma/d\Omega$ , представленные на рис. 2. Вычисленные сечения в целом значительно ближе к эксперименту по сравнению с результатами предшествующих расчетов [14, 11], однако существенные расхождения все еще остаются. Их причиной, наряду с грубостью сделанных приближений, может быть как влияние неучтенных здесь трехтельных механизмов, так и действие недостаточно ясных пока факторов, приводящих к подобным расхождениям при столкновениях более легких ядер [15].

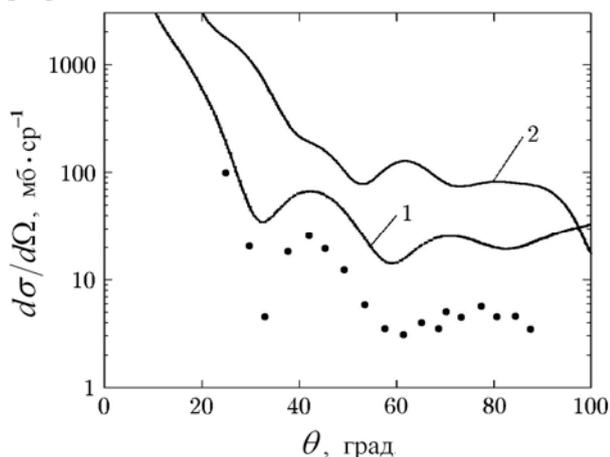


Рис. 2. Дифференциальные сечения упругого рассеяния  ${}^6\text{Li}(\alpha, \alpha){}^6\text{Li}$  при  $E^{(2)} = 17,6$  МэВ: 1 – расчетный результат; 2 – типичный предшествующий результат; точки – эксперимент [11].

## Заключение

На основе вариационного принципа построены уравнения общей формы, распространяющие метод резонирующих групп на реакции с каналами из произвольного числа частиц. Необходимый для практической реализации таких расчетов формализм довольно громоздок даже для рассмотренного случая двуканальной реакции, в которой рассеяние сопровождается трехтельным каналом, образующимся за счет распада продукта рассеяния. Однако действительно серьезные проблемы возникают на этапе конкретных вычислений, где даже за счет дальнейшего упрощения формализма с трудом удается получить конечный результат, пригодный для сравнения с экспериментом. Тем не менее вычисленные результаты демонстрируют возможность серьезного влияния трехтельных каналов даже на обычно наиболее ярко выраженный канал – упругий. Это может помочь в понимании причин тех трудностей, с которыми с самого начала сталкиваются расчеты МРГ при описании упругого рассеяния в системах легких ядер. На современном этапе полученные результаты актуальны также в связи с недостаточной плодотворностью весьма значительных усилий по сближению многих расчетных результатов МРГ с экспериментом путем введения новых факторов, физическая природа которых туманна, а количество все возрастает («псевдосостояния» и пр.). Необходимо особенно подчеркнуть, что построенные уравнения не являются средством решения задачи трех и более тел как таковой – они лишь позволяют в рамках МРГ учесть влияние полной антисимметризации и индивидуального взаимодействия нуклонов рассматриваемой системы. Развитый подход только использует методы и результаты задачи многих тел при построении уравнений относительного движения фрагментов каждого канала реакции, реализуя тем самым средствами МРГ микроскопический подход к рассмотрению задачи движения в системе из нескольких многонуклонных фрагментов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Wheeler J.A. On the mathematical description of light nuclei by the method of resonating group structure // Phys. Rev. - 1937. - Vol. 52 - P. 1107 - 1123.
2. Вильдермут К., Тан Я. Единая теория ядра. - М., 1980. - 502 с.
3. Baye D., Heenen P.H., Libert-Heinemann M. Microscopic R-matrix theory in a generator coordinate basis // Nucl. Phys. - 1977. - Vol. A291. - P. 230 - 240.
4. Филиппов Г.Ф., Романов В.Н. Об изменении структуры дейтронов при их столкновении // ЯФ. - 2001. - Т. 64. - С. 60 - 64.
5. Kozyr Yu.E. Direct break-up  ${}^6\text{Li} \rightarrow d + \alpha$  in the collisions with  ${}^4\text{He}$  at  $E = 17.4$  MeV // Proc. of Intern. Conf. "Current Problems in Nucl. Phys. and Atom Energy" (Kyiv, 9 - 15 June, 2008). - Kyiv, 2009. - Vol. 1. - P. 347 - 351.
6. Zubarev A.L., Mandelzweig V.B. Exact solution of the four-body Faddeev - Yakubovsky equations for the harmonic oscillator // Phys. Rev. - 1994. - Vol. C50 - P. 38 - 47.

7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика. - М., 1974. - 752 с.
8. Элсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. - М., 1969. - 424 с.
9. Жигунов В.П., Захарьев Б.Н. Методы сильной связи каналов в квантовой теории рассеяния. - М., 1974. - 223 с.
10. Козырь Ю.Е. МРГ расчет рассеяния в системе  ${}^4\text{He} + {}^6\text{Li}$  при  $E_\alpha \leq 30$  МэВ // Изв. РАН. Сер. физ. - 2005. - Т. 69. - С. 11 - 17.
11. Козырь Ю.Е. Влияние каналов  $p + {}^9\text{Be}$ ,  $n + {}^9\text{Be}$  при рассеянии  ${}^4\text{He}$  на  ${}^6\text{Li}$  // Изв. РАН. Сер. физ. - 2005. - Т. 69. - С. 737 - 741.
12. Kozyr Yu. E. A spatial RGM basis for scattering  ${}^4\text{He}(\alpha, \alpha){}^4\text{He}$  // Ukr. J. Phys. - 2006. - Vol. 51. - P. 750 - 757.
13. Matsuki S. Disintegration of  ${}^6\text{Li}$  and  ${}^7\text{Li}$  by 29.4 MeV alpha-particles // J. Phys. Soc. Japan. - 1968. - Vol. 24. - P. 1203 - 1223.
14. Fujiwara Y., Tang Y.C. Multiconfiguration resonating-group study of the ten-nucleon system // Progr. Theor. Phys. - 1995. - Vol. 93. - P. 357 - 367.
15. Kanada H., Kaneko T., Tang Y.C. Multi-configuration resonating-group study of the five-nucleon system // Nucl. Phys. - 1989. - Vol. A504. - P. 529 - 548.

### РІВНЯННЯ РЕЗОНУЮЩИХ ГРУП ДЛЯ РЕАКЦІЇ З ТРИЧАСТИНКОВИМИ КАНАЛАМИ

Ю. Ю. Козыр

Загальна форма багатоканальних рівнянь резонуючих груп одержана на основі варіаційного принципу для реакції, канали якої мають довільну кількість частинок. Детальний формалізм побудовано для обмеженої версії двоканальної реакції, в якій канал розсіяння супроводжується тричастинковим каналом, утвореним унаслідок прямого розпаду одного з фрагментів розсіяння. Розрахункові диференціальні перерізи прямого розсіяння  ${}^6\text{Li}(\alpha, \alpha){}^6\text{Li}$  істотно покращуються при врахуванні тричастинкового каналу, спричиненого прямим розпадом розсіяного ядра  ${}^6\text{Li}$ . Досягнення належної точності обчислень потребує серйозної обчислювальної техніки.

*Ключові слова:* рівняння резонуючих груп, багаточастинкові канали реакції, розсіяння, прямий розвал, диференціальні перерізи.

### RESONATING GROUP EQUATIONS FOR REACTION WITH THREE-BODY CHANNELS

Yu. E. Kozyr

General form of multichannel resonating group equation is derived from the variational principle for reaction channels with arbitrary particle number. Detailed formalism is elaborated for restricted version of two-channel reaction where the scattering channel is accompanied by 3-body, one due to breakup of a scattering product. Calculated differential cross sections for direct scattering  ${}^6\text{Li}(\alpha, \alpha){}^6\text{Li}$  shows an essential improvement with account of 3-body channel appearing from direct breakup of scattered  ${}^6\text{Li}$ . To obtain the necessary accuracy the calculation requires powerful computing technique.

*Keywords:* resonating group equations, multibody reaction channels, scattering, direct breakup, differential cross sections.

Поступила в редакцию 02.04.10,  
после доработки - 15.07.10.