УДК 539.128

МОДИФИЦИРОВАННАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ МАЛОНУКЛОННЫХ СИСТЕМ

В. К. Тартаковский

Институт ядерных исследований НАН Украины, Киев
Институт теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова НАН Украины, Киев

Предложен новый модифицированный вариант интерполяционной ядерной модели, в рамках которого получены уравнения движения для систем pd и ppn и произведены расчеты соответствующих волновых функций этих систем и сечений двухчастичного и трехчастичного электрорасщепления трехнуклонных ядер. Модифицированная модель приводит к лучшему, чем ранние варианты модели, согласию с наблюдаемыми сечениями и результатами других более точных расчетов на основе фаддеевского подхода.

Ключевые слова: интерполяционное приближение, метод гармонических полиномов, взаимодействие в конечном состоянии, электрорасщепление трехнуклонных ядер.

Введение

Одним из наиболее важных моментов при теоретическом описании какой-либо ядерной реакции является как можно более точное построение волновой функции нескольких несвязанных взаимодействующих частиц в конечном состоянии. Лишь в весьма редких особых случаях возможно было получение такой волновой функции в точном виде при решении уравнения Шредингера, а в большинстве случаев приходилось для этой цели использовать какие-либо приближения. Однако при низких энергиях многие из этих приближений оказываются неприменимыми.

После предложенного в 60-х годах прошлого века метода *K*-гармоник, или метода гармонических полиномов [1, 2], оказавшегося эффективным для описания связанных малонуклонных (в основном – трехнуклонных) систем, в 70-х годах была разработана общая так называемая интерполяционная модель ядерных состояний, которую можно было использовать также и в случае несвязанных состояний ядерных частиц как при низких, так и средних относительных энергиях [3 - 10].

Часто первый вариант интеполяционной модели [3 - 7] называют еще моделью Базя - Жукова (МБЖ), поскольку эти два автора внесли решающий вклад в построение этой модели. В ней относительное движение частиц характеризовали определенным угловым моментом. Мы рассмотрим сначала простейшую трехнуклонную систему из несвязанных, но взаимодействующих, нуклона и дейтрона и ограничимся при разложении отдельных частей волновой функции по *K*-гармоникам для простоты лишь основной первой гармоникой с $K = 0$.

Основые положения и уравнения МБЖ

В МБЖ волновую функцию системы *Nd* предлагали искать в виде (здесь функция обобщена в настоящей работе еще на случай сильной связи двух возможных спин-изоспиновых каналов):

$$\Psi(\vec{\rho},\sigma,\tau) = C\tilde{\Psi}(\vec{\rho},\sigma,\tau) + \sum_{i=1}^{2}\Phi_i(\rho)P_i(\vec{\rho},\sigma,\tau), \quad (1)$$

где обозначения здесь такие же, как и в работах [3, 5, 8], а индекс *i* определяет возможное спин-изоспиновое состояние (СИС):

$$i = 1: S = \frac{1}{2},\ T = \frac{1}{2},\ \xi_1(\sigma,\tau) = \chi''(\sigma)\varsigma'(\tau),$$

$$i = 2: S = \frac{3}{2},\ T = \frac{1}{2},\ \xi_2(\sigma,\tau) = \chi^{s}(\sigma)\varsigma'(\tau). \quad (2)$$

Неизвестными величинами, подлежащими определению, являлись коэффициент $C \equiv C(E)$, не зависящий от координат $\vec{\rho}$, но зависящий от полного спина *S* и относительной энергии нуклона и дейтрона *E*, и две неизвестные функции $\Phi_1(\rho)$ и $\Phi_2(\rho)$. Функции $\tilde{\Psi}$ и P_i строились заранее и считались известными. Существенным в МБЖ является отсутствие во внешней части полной функции (1), содержащей P_i, тех первых *K*-гармоник (их искусственно опускали, считая их вклад малым), которые были оставлены во внутренней части $\tilde{\Psi}$, так что P_i и $\tilde{\Psi}$ были ортогональны (что упрощало уравнения для *C*(*E*) и $\Phi_i(\rho)$), но полная функция (1) не была ортогональна функции основного состояния, что, как будет видно далее, является большим недостатком МБЖ.

Коэффициент *C*(*E*) и функции $\Phi_i(\rho)$ находятся в МБЖ из вариационного принципа

$$\sum_{\sigma,\tau}\int d\vec{\rho}\,\delta\Psi^{+}(\vec{\rho},\sigma,\tau)(\hat{H}-E)\Psi(\vec{\rho},\sigma,\tau) = 0,$$
$$\vec{\rho} = \vec{\rho}(\vec{x},\vec{y}), \quad (3)$$
$$d\vec{\rho} = \rho^5 d\rho d\Omega, \quad d\Omega = \cos^2\theta\sin^2\theta d\theta d\Omega_x d\Omega_y,$$

где $\hat{H}$ – гамильтониан системы нуклонов [3, 8, 10]. В результате получается следующая система связанных интегро-дифференциальных уравнений для определения C, Φ_1 и Φ_2:

$$C(E)(E-E_0)=\int_0^\infty d\rho\rho^{5/2}\chi_0(\rho)\sum_{i=1}^{2}Q_i(\rho)\Phi_i(\rho),\quad (4)$$

$$\Phi_i''(\rho)+\frac{1}{\rho^5 q_i(\rho)}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^5 q_i(\rho))\Phi_i'(\rho)-\frac{2M}{q_i(\rho)}\times$$

$$\times\sum_{j=1}^{2}\left[G_{ij}(\rho)-\bar{\varphi}(\rho)K_{ij}(\rho)\right]\Phi_j(\rho)-$$

$$-C(E)\,\frac{2M\chi_0(\rho)Q_i(\rho)}{\rho^{5/2}q_i(\rho)}=0,\quad i=1,2.\quad (5)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$q_i(\rho)=\int d\Omega\sum_{\sigma\tau}P_i^*(\vec{\rho},\sigma,\tau)P_i(\vec{\rho},\sigma,\tau),\quad (6)$$

$$G_{ij}(\rho)=\int d\Omega\sum_{\sigma\tau}P_i^*(\vec{\rho},\sigma,\tau)\times$$

$$\times\frac{1}{\sqrt{3}}\hat{a}\left[(\hat{V}_{12}+\hat{V}_{31})\varphi(1,23)\xi_j(1,23)\right],\quad (7)$$

$$K_{ij}(\rho)=\int d\Omega\sum_{\sigma\tau}P_i^*(\vec{\rho},\sigma,\tau)\hat{V}\frac{1}{\sqrt{3}}\hat{a}\xi_j(1,23),\quad (8)$$

$$Q_i(\rho)=\int d\Omega\sum_{\sigma\tau}P_i^*(\vec{\rho},\sigma,\tau)\hat{V}u_0(\Omega)\xi^a(1,23).\quad (9)$$

Система уравнений (4), (5) решается со следующими граничными условиями: функция (1) должна быть конечная при $\rho\to 0$, и каждая из функций $\Phi_i(\rho)$ и $\Phi_2(\rho)$ должна стремиться к 1 при $\rho\to\infty$.

В работах [8 - 11] были получены уравнения движения и рассчитаны волновые функции систем *Nd,* nnp и npp для каждого возможного СИС при заданных относительных импульсах частиц на бесконечно большом расстоянии между ними. Кроме того, в [8, 9] полученные волновые функции системы *Nd* были использованы для расчета сечения электрорасщепления трехнуклонных ядер на нуклон и дейтрон и получено в рамках МБЖ удовлетворительное согласие с экспериментом [12, 13]. Однако сечение трехчастичного электрорасщепления [10, 11] в рамках МБЖ по величине в максимуме оказывается сильно завышенным, что заставило пересмотреть некоторые положения МБЖ. Мы здесь не выписываем уравнения движения для системы трех несвязанных, но взаимодействующих нуклонов, так как они громоздки, однако весьма схожи с системой (4), (5). Формально и в этом случае полная волновая функция будет иметь такой же вид, как и (1), однако количество функций $\Phi_i(\rho)$ резко увеличится: оно будет теперь равно девяти по числу различных СИС (без учета проекций спинов). Эти состояния и функции $\Phi_i(\rho)$ приведены в [10], где, как и в [3 - 9], использовалась МБЖ.

Модифицированная интерполяционная модель (МИМ)

Здесь мы предлагаем несколько видоизмененный, а по существу новый вариант интерполяционной модели и распишем основные уравнения ее на примере системы *Nd*. В МИМ волновая функция имеет вид, подобный функции (1):

$$\Psi(\vec{\rho},\sigma,\tau)=C(E)\tilde{\Psi}(\vec{\rho},\sigma,\tau)+$$

$$+\sum_{i=1}^{2}\Phi_i(\rho)F_i(\vec{\rho},\sigma,\tau),\quad (10)$$

где функция $F_i(\vec{\rho},\sigma,\tau)$ отличается от функции $P_i(\vec{\rho},\sigma,\tau)$ тем, что в F_i оставлены все *K*-гармоники при разложении F_i в ряд по *K*-гармоникам. Но при этом $\tilde{\Psi}$ и F_i уже не будут ортогональны. Однако, как будет видно далее, будут ортогональны функция (10) и функция основного состояния системы *Nd*, а это куда более важно. Как и в раннем варианте интерполяционной модели МБЖ, подлежащими определению величинами являются *C*(*E*), $\Phi_i(\rho)$ и $\Phi_2(\rho)$, которые, конечно, будут отличаться от соответствующих величин в МБЖ.

Используя (10), вариационным методом получаем следующую систему интегро-дифференциальных уравнений в МИМ, учитывая лишь основную гармонику *K* = 0:

$$C(E)(E-E_0)=\int_0^\infty d\rho\rho^{5/2}\chi_0(\rho)\times$$

$$\times\sum_{i=1}^{2}\left[Q_i(\rho)-D_i(\rho)-(E-E_0)S_i(\rho)\right]\Phi_i(\rho),\quad (11)$$

$$\Phi_i''(\rho)+\frac{1}{\rho^5 q_i(\rho)}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^5 q_i(\rho))\Phi_i'(\rho)-$$

$$-\frac{2M}{q_i(\rho)}\sum_{j=1}^{2}G_{ij}(\rho)\Phi_i(\rho)-C(E)\frac{2M\chi_0(\rho)}{\rho^{5/2}q_i(\rho)}\times$$

$$\times\left[Q_i(\rho)-D_i(\rho)-(E-E_0)S_i(\rho)\right]=0,\ i=1,2,\ (12)$$

где введены обозначения

$$q_i(\rho) = \int d\Omega \sum_{\sigma\tau} F_i^*(\vec{\rho},\sigma,\tau) F_i(\vec{\rho},\sigma,\tau), \quad (13)$$

$$G_{ij}(\rho) = \int d\Omega \sum_{\sigma\tau} F_i^*(\vec{\rho},\sigma,\tau) \times$$

$$\times \frac{1}{\sqrt{3}} \hat{a} \left[(\hat{V}_{12} + \hat{V}_{31}) \varphi(1,23) \xi_j(1,23) \right], \quad (14)$$

$$Q_i(\rho) = \int d\Omega \sum_{\sigma\tau} F_i^*(\vec{\rho},\sigma,\tau) \hat{V} u_0(\Omega) \xi^a(1,23), \quad (15)$$

$$D_i(\rho) = \int d\Omega \sum_{\sigma\tau} F_i^*(\vec{\rho},\sigma,\tau) \tilde{V} u_0(\Omega) \xi^a(1,23), \quad (16)$$

$$S_i(\rho) = \int d\Omega \sum_{\sigma\tau} F_i^*(\vec{\rho},\sigma,\tau) u_0(\Omega) \xi^a(1,23). \quad (17)$$

Система уравнений (11), (12) решается с теми же граничными условиями, что и система (4), (5).

Наложим теперь условие ортогональности на волновые функции системы связанных трех нуклонов и системы несвязанных взаимодействующих нуклона и дейтрона. Это условие приводит к соотношению

$$C(E) = -\int_0^\infty d\rho \rho^{5/2} \chi_0(\rho) \sum_{i=1}^{2} S_i(\rho) \Phi_i(\rho), \quad (18)$$

которое в рамках использованных модельных представлений в МИМ практически совпадает с уравнением (11). Действительно, функция $D_i(\rho)$ в уравнении (16) отличается от функции $Q_i(\rho)$ в уравнении (15) только тем, что оператор взаимодействия $\hat{V}$, определенный на всем базисе разложения по *K*-гармоникам, заменен оператором взаимодействия $\tilde{V}$, определенным на тех первых *K*-гармониках, которые оставлены в функции $\tilde{\Psi}(\vec{\rho},\sigma,\tau)$. Это приводит к тому, что функции $D_i(\rho)$ и $Q_i(\rho)$ совпадают в области взаимодействия всех трех нуклонов, т.е. при сравнительно небольших значениях $\rho \sim 1$ фм. Эта область ρ вносит в интеграл в уравнении (11) основной вклад из-за быстрого спадания с ростом ρ волновой функции связанного состояния всех трех нуклонов $\chi_0(\rho)$. Поэтому под интегралом в уравнении (11) с достаточно высокой точностью можно заменить $D_i(\rho)$ на $Q_i(\rho)$, что и приводит к совпадению уравнения (11) с соотношением (18). Таким образом, волновую функцию системы "нуклон - дейтрон" (10) в МИМ можно считать ортогональной к волновой функции связанного (основного) состояния всех трех нуклонов, чего нельзя сказать о волновой функции (1) в первом варианте модели МБЖ.

С помощью аналогичных выкладок и рассуждений можно показать, что в рамках МИМ будут также ортогональны и волновые функции трех несвязанных взаимодействующих нуклонов и трех связанных нуклонов.

Расчеты сечений реакций ^{3}He(e,e'p)^{2}H и ^{3}He(e, e'p)pn в МБЖ и МИМ и сравнение с экспериментом

Представляет интерес рассчитать дифференциальные сечения на совпадение рассеянного электрона и выбитого из трехнуклонного ядра протона в процессах двухчастичного и трехчастичного (т.е. полного) электрорасщепления ядер ^{3}He и ^{3}H. Остановимся для определенности на процессах ^{3}He(e, e'p)^{2}H и ^{3}He(e, e'p)pn, т.е. на развалах ядра ^{3}He, которые более подробно изучены [8 - 14]. Общие выражения для сечений указанных процессов получены в работах [8 - 11], которыми мы здесь и воспользуемся для расчетов в МБЖ (что уже было в основном сделано в указанных работах) и в МИМ, и сделаем сравнение результатов для обеих моделей, а также сравнение с экспериментом [12, 13].

Сечение $\frac{d\sigma}{d\Omega_p d\Omega_e dE_e}$, где $d\Omega_p$ и $d\Omega_e$ – элементы телесных углов вылета освободившегося протона и рассеянного электрона, измерялось в [12, 13] в единицах 10^{-2} мкб/(МэВ · ср^2) при угле рассеяния электрона $\theta_e = 51{,}7°$, начальной и конечной его энергии $E_e = 550$ и 443 МэВ, а также при углах вылета протона $\theta_p = 43,\ 52,\ 57$ и $62°$.

Приведем сначала данные для сечения двухчастичного электрорасщепления ядра ^{3}He. В табл. 1 указаны рассчитанные сечения в МБЖ и МИМ и соответствующие измеренные сечения с погрешностями. Видно, что сечение в МИМ для процесса ^{3}He(e, e'p)^{2}H несколько меньше сечения в МБЖ (на $10 \div 15\,\%$) и приближается по величине к рассчитанному сечению в [14], где использовались фадеевские волновые функции. Сечение в МИМ, как и в [14], оказалось несколько меньше экспериментального в максимуме. Но все эти различия все же невелики по сравнению с тем, что наблюдается для процесса ^{3}He(e, e'p)pn, что будет видно далее.

Таблица 1

θ_p^0	43	52	57	62
МБЖ	2,9	4,6	3,8	2,1
МИМ	2,5	3,9	3,2	1.5
Эксперимент	2,0±0,5	4,7±0,5	3,3±0,5	0,8±0,5

В табл. 2 представлены аналогичные расчетные данные и эксперимент для сечения процесса ^{3}He(e, e'p)pn. Видно, что рассчитанное сечение в МБЖ в этом случае превышает эксперимент примерно на три порядка по величине, в то время как теоретические в МИМ и экспериментальные сечения будут уже одного порядка, хотя еще заметно отличаются по величине.

Таблица 2

θ_p^0	43	52	57	62
МБЖ	$4{,}2\cdot10^3$	$8{,}8\cdot10^3$	$7{,}5\cdot10^3$	$3{,}6\cdot10^3$
МИМ	7,8	10,2	9,9	7,7
Эксперимент	2,2±0,2	3,7±0,2	2,8±0,2	0,5±0,2

Большие значения сечения в МБЖ в табл. 2 связаны с полученными при расчетах в [10] весьма значительными по величине функциями $\Phi_i(\rho)$ для некоторых *i* в области $\rho < 7$ фм, что является следствием неортогональности волновых функций начального и конечного состояний в МБЖ. Однако в МИМ функции $\Phi_i(\rho)$ при умеренных значениях ρ становятся заметно меньше по величине, чем в МБЖ для тех же самых *NN*-потенциалов взаимодействия, а *C(E)* становятся несколько больше, чем в МБЖ. Так как знаки внутренней и внешней частей интерполяционной функции в некоторых областях изменения ρ противоположны, то значения матричных элементов перехода и соответствующих сечений резко уменьшаются в МИМ по сравнению с тем, что были в первоначальном варианте интерполяционной модели МБЖ.

Улучшить согласие рассчитанных сечений электрорасщепления трехнуклонных ядер с экспериментом в МИМ можно было бы, используя более реалистические *NN*-потенциалы, а также учитывая следующие члены рядов разложения волновых функций по *K*-гармоникам. Большая чувствительность полного электрорасщепления ядер ^{3}He к деталям ядерной структуры и *NN*-взаимодействия свидетельствует о необходимости дальнейших исследований этого процесса для получения новой информации и установления более точных пределов применимости модели.

Таким образом, данные по трехчастичному электрорасщеплению ядер ^{3}He явились хорошим тестом для проверки рассматриваемых моделей и говорят в пользу МИМ. В этом и состоит основной вывод настоящей работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Симонов Ю.А.* Задача трех тел. Полная система угловых функций // ЯФ. - 1966. - Т. 3, вып. 4. - С. 630 - 638.
2. *Симонов Ю.А., Бадалян А.М.* Энергия связи и волновая функция H^3 и He^3 // ЯФ. - 1967. - Т. 5, вып. 1. - С. 88 - 100.
3. *Базь А.И.* Модель уравнений ядерной физики. - Киев, 1971. – 38 с. - (Препр./АН УССР. Ин-т теор. физики; ИТФ-71-79Р).
4. *Жуков М.В., Эфрос В.Д.* Реакции в системе нескольких нуклонов // ЯФ. - 1971. - Т. 14, вып. 3. - С. 557 - 589.
5. *Базь А.И., Жуков М.В.* Модель уравнений ядерной физики // ЯФ. - 1972. - Т. 16, вып. 1. - С. 60 - 73.
6. *Базь А.И., Жуков М.В.* Модель уравнений ядерной физики. Один канал распада // ЯФ. - 1972. - Т. 16, вып. 5. - С. 958 - 973.
7. *Базь А.И., Демин В.Ф., Жуков М.В.* Свойства легчайших ядер и проблема нуклон-нуклонного потенциала // ЭЧАЯ. - 1975. - Т. 6, вып. 2. - С. 515 - 563.
8. *Тартаковский В.К.* Расчет сечений двухчастичного электрорасщепления ядер ^{3}He и ^{3}H с учетом взаимодействия в конечном состоянии // ЯФ. - 1974. - Т. 20, вып. 1. - С. 46 - 54.
9. *Тартаковский В.К., Козловский И.В., Фурса А.Д.* Влияние кластеризации на свойства ядер ^{3}He и ^{3}H и их электрорасщепление // ЯФ. - 1976. - Т. 23, вып. 4. - С. 727 - 734.
10. *Тартаковский В.К., Кобринский Ю.В.* О волновых функциях системы трех несвязанных взаимодействующих нуклонов // ЯФ. - 1981. - Т. 33, вып. 4. - С. 904 - 910.
11. *Тартаковский В.К., Кобринский Ю.В.* Исследование полного электрорасщепления ядер ^{3}He в интерполяционной модели // УФЖ. - 1983. - Т. 28, № 6. - С. 931 - 933.
12. *Johansson A.* Quasifree electron-proton scattering in ^{3}H and ^{3}He // Phys. Rev. B. - 1964. - Vol. 136, No. 4. - P. 1030 - 1035.
13. *Gibson B.F., West G.B.* Remarks concerning inelastic electron scattering from ^{3}He // Nucl. Phys. - 1967. - Vol. B1, No. 7. - P. 349 - 361.
14. *Heimbach C.R., Lehman D.R., O'Connell J.S.* Two-body electrodisintegration of ^{3}He: Faddeev calculation // Phys. Lett. - 1977. - Vol. 66B, No. 1. - P. 1 - 4.

МОДИФІКОВАНА ІНТЕРПОЛЯЦІЙНА МОДЕЛЬ ДЛЯ МАЛОНУКЛОННИХ СИСТЕМ

В. К. Тартаковський

Запроповано новий модифікований варіант інтерполяційної ядерної моделі, у рамках якого одержано рівняння руху для систем pd і ppn та виконано розрахунки відповідних хвильових функцій цих систем і перерізів двочастинкового та тричастинкового електророзщеплення тринуклонних ядер. Модифікована модель приводить до кращого, ніж попередні варіанти моделі, узгодження з перерізами, що спостерігаються, і результатами інших більш точних розрахунків на основі фадєєвського підходу.

Ключові слова: інтерполяційне наближення, метод гармонійних поліномів, взаємодія в кінцевому стані, електророзщеплення тринуклонних ядер.

MODIFIED INTERPOLATION MODEL FOR FEW-BODY SYSTEMS

V. K. Tartakovsky

New modified version of interpolation nuclear model is proposed. Within the scope of this version, the motion equations for pd and ppn systems are derived and the calculations of the corresponding wave functions of these systems and cross-sections of the two and three particle electrodisintegration of three nucleon nuclei are made. The modified model leads to the best (in comparison with previous version of the model) agreement with observable cross-section and with the results of the others (more precise) calculations based on Faddeev's method.

Keywords: interpolation approach, harmonic polynominal method, final-state interaction, electrodisintegration of three nucleon nuiclei.

Поступила в редакцию 19.06.09,
после доработки - 11.11.09.