

НЕРЕЛЯТИВИСТСКАЯ КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ЧАСТИЦ И КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ СООТНОШЕНИЯ „КООРДИНАТА - ИМПУЛЬС”

А. И. Стешенко

Рассмотрена квантово-механическая модель систем взаимодействующих тел с учетом некоммутативности операторов координат и импульсов разных частиц, а также корреляционных равенств для неопределенностей названных величин. Некоммутативность операторов здесь обусловлена действием межчастичных сил и является естественным обобщением общепринятого коммутационного соотношения между оператором координат и оператором импульса для одной частицы. Эффективность модели демонстрируется конкретными расчетами водородоподобных атомов ( $H$ -атомы).

Введение. Формулирование модели

Ранее в [1, 2] при рассмотрении многочастичных систем была рассмотрена идея о некоммутативности операторов координат и импульсов разных частиц со следующей аргументацией: "Отказ от неявного предположения о конечности скорости распространения взаимодействий приводит к некоммутативности операторов координат и импульсов разных частиц". В настоящей работе эта идея нашла дальнейшее развитие: здесь дано несколько иное, чем в [1, 2], физическое обоснование факту некоммутативности названных операторов, а также введены корреляционные равенства (КР) для неопределенностей координат и импульсов взаимодействующих частиц. Последнее обстоятельство (введение КР) фактически изменило статус прежней модели [1, 2] из сугубо "теоретико-философского" на, "теоретико-прикладной" и открыло тем самым возможность проведения конкретных высокоточных расчетов.

Ниже в рамках модели НОКР ("модель НОКР" - некоммутативность операторов + корреляционные равенства) будут записаны и детально рассмотрены уравнения для основных и некоторых возбужденных состояний  $H$ -подобных атомов.

Прежде чем непосредственно приступить к формулированию модели НОКР, заметим, что в квантовой механике многочастичное уравнение Шредингера (УШ) для невзаимодействующих частиц и УШ для системы из  $A$  взаимодействующих частиц отличаются друг от друга лишь наличием или отсутствием слагаемых, содержащих потенциал  $V_{ij}$ . На самом же деле вариант с взаимодействием принципиально отличается от случая  $V_{ij} \equiv 0$ . Изложим далее кратко основные моменты анализа, начиная с момента "появления" УШ.

Как известно, чтобы записать УШ, нужно к выражению для полной энергии рассматриваемой системы в классической механике

$$E = H(q_j, p_j) \tag{1}$$

применить формальное преобразование

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad p_j \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial q_j}, \tag{2}$$

где  $p_j, q_j$  - пара сопряженных канонически координат (импульс и пространственная координата)  $j$ -й частицы. При этом, во избежание неоднозначности, преобразование (2) условились (см., например, [3]) использовать лишь в том случае, когда независимые

координаты  $q_j$  есть суть декартовы координаты. Ясно, что нахождение таким путем операторного уравнения для волновой функции  $\Psi(1, 2, \dots, A)$  не может служить выводом уравнения движения, каковым представляется УШ; оно, как сказано в [4], "является обобщением опытных данных".

Один из важных результатов такого квантовомеханического "обобщения опытных данных" содержится в коммутационном соотношении между операторами обобщенной координаты  $\hat{q}$  и сопряженного ей импульса  $\hat{p}$

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar. \quad (3)$$

Это фундаментальное соотношение имеет место для любых квантовых объектов микромира. Какая же "физика" заключена в формуле (3)? Об этом в свое время немало писали создатели квантовой теории (см., например, [5 - 7]), интересен данный вопрос и сегодня (в этой связи можно указать на оригинальные и несколько неожиданные результаты А. Д. Суханова [8, 9]). Общеизвестная трактовка соотношения (3) сводится к утверждению, что одновременно физические величины  $q, p$ , отвечающие операторам  $\hat{q}$  и  $\hat{p}$ , могут быть найдены лишь с точностью

$$\Delta q \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (4)$$

Другими словами, погрешности измерения координаты и импульса частицы оказываются скоррелированными друг с другом.

До сих пор речь шла о сопряженных координатах одной и той же частицы, где картина представляется достаточно ясной. Пусть теперь имеется совокупность из  $A$  частиц, взаимодействующих между собой посредством некоторого потенциала  $V$ . Спрашивается: имеет ли место корреляция погрешностей одновременно измеренных координат и импульсов, отвечающих разным частицам? Традиционная теория, как известно, дает здесь отрицательный ответ, что, на наш взгляд, не совсем так. Действительно, пусть, например, взаимодействие между частицами 1 и 2 настолько сильное, что в эксперименте они вполне могут выступать как одна массивная частица. В этом случае наличие корреляций между погрешностями измерений координаты 1-й частицы и импульса 2-й частицы не вызывает сомнений. Для слабого взаимодействия данные корреляции на опыте могут быть практически незаметны, но, в принципе, они должны быть.

После вышесказанного приступим к формулированию модели НОКР. Сначала, ради простоты, сделаем это на примере двух взаимодействующих квантовых частиц, массы которых до образования связанной системы равнялись  $m_1$  и  $m_2$ . Начнем с коммутационных соотношений для сопряженных координат  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  и  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ . В модели НОКР они записываются в следующем виде:

$$[x_k, \hat{p}_l^x] = [y_k, \hat{p}_l^y] = [z_k, \hat{p}_l^z] = i\hbar\beta_{kl}, \quad k, l = 1, 2, \quad (5)$$

где  $(x_k, y_k, z_k)$  - декартовы координаты  $k$ -й частицы, а  $\hat{\mathbf{p}}_l(\hat{p}_l^x, \hat{p}_l^y, \hat{p}_l^z)$  - соответствующий оператор импульса  $l$ -й частицы, точнее

$$\hat{\mathbf{p}}_1 = -i\hbar\beta_{11} \cdot \nabla_1, \quad \hat{\mathbf{p}}_2 = -i\hbar\beta_{22} \cdot \nabla_2. \quad (6)$$

Следует заметить, что постоянная Планка  $\hbar$  и величины  $\beta_{kl}$  играют здесь роль коммутационных параметров теории. Численные значения  $\beta_{kl}$ , в отличие от  $\hbar$ , зависят от природы конкретно рассматриваемых частиц. При этом область изменения величин  $\beta_{kl}$ , по



физическому смыслу, представляет собой интервал  $[0 < \beta_{kl} \leq 1]$ ; ясно также, что в случае  $k \neq l$  имеет место сильное неравенство  $\beta_{kl} \ll \beta_{ll}$ . Соотношения коммутации между оператором полного импульса системы  $\hat{P} = \hat{p}_1 + \hat{p}_2$  и пространственными координатами частиц имеют стандартный вид:

$$[x_k, \hat{P}^x] = [y_k, \hat{P}^y] = [z_k, \hat{P}^z] = i\hbar, \quad k = 1, 2. \quad (7)$$

Обратимся теперь к функции Гамильтона  $H$ . В случае двух классических частиц она равна

$$H = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + V_{12}, \quad (8)$$

т.е. имеем, с учетом (6), следующее УШ:

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2(m_1 / \beta_{11}^2)} \cdot \nabla_1^2 - \frac{\hbar^2}{2(m_2 / \beta_{22}^2)} \cdot \nabla_2^2 + V_{12} \right] \Psi(1,2) = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}. \quad (9)$$

Как видим, уравнение (9) отличается от обычного УШ лишь измененными массами частиц

$$m_1' \equiv \frac{m_1}{\beta_{11}^2}, \quad m_2' \equiv \frac{m_2}{\beta_{22}^2}. \quad (10)$$

Последующая задача состоит в том, чтобы найти эти измененные массы  $m_1'$  и  $m_2'$ . С этой целью уместно рассмотреть, наряду с соотношениями неопределенностей Гейзенберга

$$\Delta x_k \Delta p_l^x = \Delta y_k \Delta p_l^y = \Delta z_k \Delta p_l^z \geq \frac{\hbar}{2} \beta_{kl}; \quad k, l = 1, 2, \quad (11)$$

соответствующие корреляционные равенства

$$\gamma_{kl} \Delta x_k \Delta p_l^x = \gamma_{kl} \Delta y_k \Delta p_l^y = \gamma_{kl} \Delta z_k \Delta p_l^z = \frac{\hbar}{2} \beta_{kl}, \quad k, l = 1, 2. \quad (12)$$

Тогда, выполнив мысленный эксперимент по измерению координат  $l$ -й и  $2$ -й частиц с максимальной точностью, можно связать коммутационные параметры  $\beta_{11}$  и  $\beta_{22}$  с матричным элементом (м.э.) силы  $\langle \Psi(1, 2) | F_{12} | \Psi(1, 2) \rangle$  и корреляционными множителями  $\gamma_{12}, \gamma_{21}$  следующим образом:

$$\beta_{11} = 1 - 2 \frac{\hbar c}{\varepsilon_1^2} \gamma_{12} \langle |F| \rangle, \quad \varepsilon_1 \equiv m_1 c^2; \quad (13)$$

$$\beta_{22} = 1 - 2 \frac{\hbar c}{\varepsilon_2^2} \gamma_{21} \langle |F| \rangle, \quad \varepsilon_2 \equiv m_2 c^2.$$

При нахождении (13) были приняты во внимание два обстоятельства: во-первых, максимальная точность измерения координаты частицы, очевидно, ограничена ее комптоновской длиной волны

$$\Delta x_1 = \frac{\hbar}{m_1 c} \quad (14)$$

и, во-вторых, в качестве времени взаимодействия частиц следует взять “пролетное время”

$$\Delta t = \frac{\Delta x_1}{c}. \quad (15)$$

Таким образом, связанные состояния двух взаимодействующих частиц в модели НОКР будут описываться уравнением

$$\begin{aligned} & -\frac{\hbar^2}{2m_1} \left[ 1 - 2 \frac{\hbar c}{\varepsilon_1^2} \gamma_{12} \langle \Psi(1, 2) | F_{12} | \Psi(1, 2) \rangle \right]^2 \cdot \nabla_1^2 \Psi(1, 2) - \\ & -\frac{\hbar^2}{2m_2} \left[ 1 - 2 \frac{\hbar c}{\varepsilon_2^2} \gamma_{21} \langle \Psi(1, 2) | F_{12} | \Psi(1, 2) \rangle \right]^2 \cdot \nabla_2^2 \Psi(1, 2) + V_{12} \cdot \Psi(1, 2) = E \cdot \Psi(1, 2), \end{aligned} \quad (16)$$

которое представляет собой специфическое нелинейное уравнение относительно волновой функции  $\Psi$  (аналог УШ), причем наиболее существенный параметр нелинейности оказывается пропорциональным отношению м.э. силы к величине  $(m_1 c^2)^2 / \hbar c$ , где  $m_1 \leq m_2$ . Конкретные решения этого уравнения можно искать методом последовательных итераций, когда на 1-м шаге решается обычное УШ с массами, которыми обладали частицы до взаимодействия -  $m_1$  и  $m_2$  ( $\beta_{11} = \beta_{22} \equiv 1$ ). Затем, найдя волновую функцию  $\Psi(1, 2)$ , вычисляем м.э. силы  $\langle \Psi(1, 2) | F_{12} | \Psi(1, 2) \rangle$  и первые, отличные от единицы, значения коммутационных параметров  $\beta_{11}$  и  $\beta_{22}$ . На 2-м шаге УШ решается уже с измененными массами частиц  $m'_1 = m_1 / \beta_{11}^2$  и  $m'_2 = m_2 / \beta_{22}^2$ . Имея новую  $\Psi(1, 2)$ , рассчитываем величину  $\langle |F| \rangle$  и сравниваем ее с предыдущим значением, полученным на 1-м шаге. Далее продолжаем итерационный процесс до тех пор, пока значения м.э. силы  $\langle |F| \rangle$  на последующем и предыдущем шаге практически не будут отличаться. Очевидно, перед началом описанного итерационного процесса следует определиться с численными значениями корреляционных множителей  $\gamma_{12}$  и  $\gamma_{21}$ , входящих в уравнение (16). Для их вычисления можно привлечь те или иные характеристики данной системы с надежными экспериментальными значениями. О том, как это делается практически, будет детально показано ниже.

### H-подобные атомы

Применим далее рассматриваемую модель НОКР к атому водорода и к некоторым ему подобным атомам (H-подобные атомы). В этом случае для стационарных состояний имеем

$$\begin{cases} \left[ -\frac{\hbar^2}{2m'_1} \cdot \nabla_1^2 - \frac{\hbar^2}{2m'_2} \cdot \nabla_2^2 + \frac{Ze^2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \right] \Psi(1, 2) = E \cdot \Psi(1, 2); \\ m'_1 = m_e / \left( 1 - \frac{2\hbar c}{\varepsilon_1^2} \gamma_{12} \cdot \langle |F| \rangle \right)^2, m'_2 = m_H / \left( 1 - \frac{2\hbar c}{\varepsilon_2^2} \gamma_{21} \cdot \langle |F| \rangle \right)^2, \end{cases} \quad (17)$$

где  $m_e, m_H$  - масса электрона и Z-ядра, соответственно;  $\langle |F| \rangle \equiv \left\langle \Psi(1, 2) \left| \frac{Ze^2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \right| \Psi(1, 2) \right\rangle$  - м.э.

силы. Первое уравнение в формуле (17) при фиксированных  $m'_1$  и  $m'_2$  детально описано во многих учебниках по квантовой механике. Введение здесь переменных  $\mathbf{R}_{c.m.}$  (радиуса-вектора центра масс) и  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  (вектора относительного движения) приводит к



факторизации волновой функции  $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \Phi(\mathbf{R}_{c.m.}) \cdot \psi(\mathbf{r})$ , причем с физической точки зрения интерес представляет лишь функция

$$\psi(\mathbf{r}) \equiv \psi_{nlm}(r, \theta, \varphi) = R_{nl}(r) \cdot Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (18)$$

где  $Y_{lm}(\theta, \varphi)$  - сферические функции [11], а функция  $R_{nl}(r)$  находится из так называемого радиального УШ

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{d}{dr} + \frac{2\mu'}{\hbar^2} \left( E + \frac{Ze^2}{r} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R_{nl}(r) = 0, \quad (19)$$

которое для связанных состояний имеет решение (см., например, [12])

$$R_{nl}(r) = \left( \frac{Z}{na_o} \right)^{3/2} \frac{2 \cdot n!}{\sqrt{n(n-l-1)!(n+l)!}} \left( \frac{2Zr}{na_o} \right)^l \exp\left( -\frac{Zr}{na_o} \right) L_{n-l-1}^{2l+1} \left( \frac{2Zr}{na_o} \right), \quad (20)$$

$n = 1, 2, \dots; l = 0, 1, 2, \dots, n-1,$

где  $L_n^\alpha$  - обобщенные полиномы Лагерра [13],  $\mu'$  - измененная приведенная масса,  $a_o$  - радиус  $l$ -й боровской орбиты соответственно равны

$$L_n^\alpha(x) = \frac{1}{n!} e^x x^{-\alpha} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^{n+\alpha}) = \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(k+\alpha+1)} \cdot \frac{(-x)^k}{k!(n-k)!}, \quad (21)$$

$$\mu' = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}; a_o = \frac{\hbar^2}{\mu' e^2}.$$

Приведенный в формулах (19) - (21) явный вид известных функций потребуется при нахождении некоторого алгебраического уравнения, решение которого в данном конкретном случае может заменить указанную выше итерационную процедуру. С этой целью запишем м. э. силы  $\langle |F| \rangle$  на волновых функциях  $\psi_{nlm}$

$$\langle |F| \rangle = \left\langle \psi_{nlm} \left| \frac{Ze^2}{r^2} \right| \psi_{nlm} \right\rangle = \frac{Ze^2}{n^3 (l + \frac{1}{2})} \left( \frac{Z}{a_o} \right)^2 \equiv f_{nl}. \quad (22)$$

В случае основного состояния м.э. силы  $f_{10} = 2Ze^2 (Z/a_o)^2$ .

Как видим, величина  $f_{nl}$ , также как и волновая функция  $\psi_{nlm}$ , зависит от боровского радиуса  $a_o$ , который, в свою очередь, является функцией от  $f_{nl}$ . Действительно, из равенств (21) и (17) находим

$$a_o = \frac{\hbar^2}{\mu' e^2} = \frac{\hbar^2}{e^2} \left[ \frac{1}{m_1} \left( 1 - \gamma_{12} \frac{2\hbar c}{\varepsilon_1^2} \cdot f_{nl} \right)^2 + \frac{1}{m_2} \left( 1 - \gamma_{21} \frac{2\hbar c}{\varepsilon_{21}^2} \cdot f_{nl} \right)^2 \right]. \quad (23)$$

Подставив это выражение в формулу (22), получим искомое уравнение относительно  $f_{nl}$

$$\frac{(2l+1)n^3}{4(\alpha Z)^3} \cdot \frac{2\hbar c}{\varepsilon_1^2} f_{nl} = \frac{1}{\left[ \left( 1 - 2\gamma_{12} \frac{\hbar c}{\varepsilon_1^2} f_{nl} \right)^2 + \zeta \left( 1 - 2\gamma_{21} \zeta^2 \frac{\hbar c}{\varepsilon_1^2} f_{nl} \right)^2 \right]^2}, \quad (24)$$

здесь  $\alpha \equiv e^2 / \hbar c$  - постоянная тонкой структуры, а величина  $\xi \equiv \varepsilon_1 / \varepsilon_2$ . Уравнение (24) позволяет найти м.э. силы  $f_{nl}$  без каких-либо итерационных процедур и вычислить затем "самосогласованно перенормированные" массы частиц  $m_1$  и  $m_2$ , которые должны подставляться в (17).

Энергетический спектр связанных состояний  $H$ -подобных атомов рассчитывается по формуле

$$E_{nl} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\alpha Z}{n} \right)^2 \frac{\varepsilon_1}{\beta_{11}^2 + \xi \cdot \beta_{22}^2}. \quad (25)$$

Для проведения конкретных расчетов необходимо задать численные значения корреляционных множителей  $\gamma_{12}$  и  $\gamma_{21}$ , а также значения всех физических констант, входящих в уравнения (17) - (21). В предельном случае  $\beta_{11} = \beta_{22} = 1$ , очевидно, будем иметь формулы традиционной квантовой механики. При этом энергия основного состояния атома водорода ( $Z = 1$ )

$$E_{n=1} = -\alpha^2 \frac{\varepsilon_1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \varepsilon_1 / \varepsilon_2}, \quad (26)$$

для значений  $\varepsilon_1 = 0,510998902$  МэВ,  $\varepsilon_2 = 938,271998$  МэВ и  $\alpha^{-1} = 137,03599976$  оказывается равной  $E_1' = -13,5982858517$  эВ. В другом предельном случае  $\gamma_{12} = \gamma_{21} = 1$  уравнение (24) приобретает вид

$$x[(1-2x)^2 + \xi(1-2\xi^2 x)^2]^2 = 2\alpha^3, \quad (27)$$

здесь введена безразмерная величина

$$x \equiv \frac{\hbar c}{\varepsilon_1^2} f_{10}. \quad (28)$$

Уравнение (27) имеет один положительный корень  $x_0 = 7,763\,467\,765\,809 \cdot 10^{-7}$ , который приводит к значению м. э. силы  $f_{10} = \varepsilon_1^2 x_0 / \hbar c \approx 1,027\,328\,325 \cdot 10^{-9}$  МэВ/Фм. Для этого значения  $f_{10}$  будем иметь:  $\beta_{12} = 1 - \beta_{11} = (2\hbar c / \varepsilon_1^2) \cdot f_{10} = 0,155\,269\,355 \cdot 10^{-5}$ ,  $\beta_{21} = 1 - \beta_{22} = (2\hbar c / \varepsilon_2^2) \cdot f_{10} = 0,46054086610 \cdot 10^{-12}$ ,  $\Delta m_e c^2 \equiv m_e' c^2 - m_e c^2 = 0,158685310 \cdot 10^{-5}$  МэВ,  $\Delta m_H c^2 \equiv m_H' c^2 - m_H c^2 = 0,864225197 \cdot 10^{-9}$  МэВ и энергию  $E_{n=1, l=0}'' = -13,598328057$  эВ. Если теперь в качестве экспериментального значения энергии взять

$$E_1^{\text{exp}} = -R_\infty \hbar c \cdot \frac{1}{1 + \varepsilon_1 / \varepsilon_2}, \quad (29)$$

где, согласно [14],  $R_\infty \hbar c = 13,60569172(52)$  эВ, то можно видеть, что величина  $E_1^{\text{exp}} = -13,598\,285\,862$  эВ попадает в интервал, составленный из только что рассмотренных предельных оценок  $[E_1', E_2']$ , и находится вблизи точки  $E_1'$ .

При вычислении корреляционных множителей  $\gamma_{12}$  и  $\gamma_{21}$  воспользуемся экспериментальным значением энергии основного состояния атома водорода (энергия ионизации атома)

$$|E_1^{\text{exp}}| = \frac{R_\infty \hbar c}{1 + \xi} = \frac{\varepsilon_1 \alpha^2}{2} \frac{1}{\left(1 - 2 \frac{\hbar c}{\varepsilon_1^2} \gamma_{12} \cdot f_{10}\right)^2 + \xi \left(1 - 2 \xi^2 \frac{\hbar c}{\varepsilon_1^2} \gamma_{21} \cdot f_{10}\right)^2}, \quad (30)$$



взяв в качестве м.э. силы  $f_{10}$  его приближенное значение

$$f_{10} \Rightarrow \tilde{f}_{10} = 2 \frac{\alpha^3 \varepsilon_1^2}{\hbar c} \cdot \frac{1}{(1 + \xi)^2}. \quad (31)$$

Тогда для  $\gamma_{12}$  имеем выражение

$$\gamma_{12} = \frac{(1 + \xi)^2}{4\alpha^3} \left[ 1 - \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \alpha^2 (1 + \xi)}{2 \cdot R_\infty \hbar c} - \xi \left( 1 - \frac{4\alpha^3}{(1 + 1/\xi)^2} \cdot \gamma_{21} \right)^2} \right]. \quad (32)$$

Следует заметить, что из-за малости коэффициента  $4\alpha^3 / (1 + 1/\xi)^2 \approx 4,605 \cdot 10^{-13}$ , стоящего перед  $\gamma_{21}$  в формуле (32), рассматриваемая здесь теория атома водорода оказывается индифферентной по отношению ко второму корреляционному множителю  $\gamma_{21}$ . Перебор значений  $\gamma_{21}$  от  $\gamma_{21} = 0,0001$  до  $\gamma_{21} = 1,0$  приводит к изменению величины  $\gamma_{12}$  лишь в 7-м знаке. В то же время величина  $\gamma_{12}$  исключительно чувствительна к значению константы Ридберга  $R_\infty \hbar c$ . Так, для экспериментального [14] значения  $R_\infty \hbar c = 13,60569172$  эВ из формулы (32) находим  $\gamma_{12} \approx 2,44463 \cdot 10^{-4}$ . Если же ограничиться приближенным (до шести знаков) значением  $R_\infty \hbar c = 13,6057$  эВ, то  $\gamma_{12} \approx 0,19632$ ; а при "пятизначном" округлении константы Ридберга  $R_\infty \hbar c = 13,606$  эВ имеем значение  $\gamma_{12} \approx 7,3$ , которое, в рамках данной модели, является бессмысленным ( $[0 < \gamma_{12} \leq 1]$ ). Другими словами, будь постоянная Ридберга всего лишь на 0,0003 эВ больше, и нашу теорию следовало бы отбросить как несоответствующую реальности.

Вернемся теперь к алгебраическому уравнению (24), подставив сюда вместо корреляционных множителей найденную для атома водорода оценку  $\gamma_{12} = \gamma_{21} \approx 2,44463 \cdot 10^{-4}$ , и запишем его в виде полинома от неизвестной  $x \equiv \frac{\hbar c}{\varepsilon_1^2} f_{10}$ , т.е.

$$a_1 \cdot x - a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 - a_4 \cdot x^4 + a_5 \cdot x^5 - 2\alpha^3 = 0, \quad (33)$$

где коэффициенты  $a_i$  будут равны:  $2\alpha^3 = 0,7771878058620 \cdot 10^{-6}$ ,  $a_1 = (1 + \xi)^2 \approx 1,001089530653$ ,  $a_2 = 8\gamma(1 + \xi)(1 + \xi^3) \approx 1,956770707906 \cdot 10^{-3}$ ,  $a_3 = 16\gamma^2[(1 + \xi^3)^2 + \frac{1}{2}(1 + \xi)(1 + \xi^5)] \approx 1,434554523990 \cdot 10^{-6}$ ,  $a_4 = 32\gamma^3(1 + \xi^3)(1 + \xi^5) \approx 4,675095140637 \cdot 10^{-10}$ ,  $a_5 = 16\gamma^4(1 + \xi^5)^2 \approx 5,714443582322 \cdot 10^{-14}$ . Точки пересечения функции  $\varphi(x) = a_1 x - a_2 x^2 + a_3 x^3 - a_4 x^4 + a_5 x^5 - 2\alpha^3$  с осью абсцисс, очевидно, и будут представлять собой корни  $x_i \equiv f_{10}^{(i)}$  рассматриваемого уравнения (33). На рисунке приведен график функции  $\varphi(x)$  общим планом, а также поведение кривой  $\varphi(x)$  в окрестностях точек  $x_1 = 8 \cdot 10^{-7}$  и  $x_2 = 2050,0$  - более крупным планом. Как видим из рисунка, определенно можно говорить лишь об одном корне  $x_1 = 7,763419586802 \cdot 10^{-7}$ . При этом значение м.э. силы  $f_{10}^{(1)} = 1,027321949956 \cdot 10^{-9}$  МэВ/Фм оказалось весьма близким к приближенной оценке (31)  $\tilde{f}_{10} = 1,027321947815 \cdot 10^{-9}$  МэВ/Фм. Говоря о возможных других положительных корнях многочлена  $\varphi(x)$ , следует иметь в виду, что их число, согласно правилу Декарта, может отличаться от числа перемен знаков в полиноме  $\varphi(x)$  на четное число; поэтому в данном

случае число положительных корней может быть 1, 3 или 5. Однако для приведенных выше фундаментальных констант имеется только один корень. Изменение массы электрона, для м.э. силы  $f_{10} = f_{10}^{(1)}$ , составляет малую величину, равную  $\Delta m_e c^2 \equiv m'_e c^2 - m_e c^2 \approx 0,387924 \cdot 10^{-9}$  МэВ.

Применим далее рассматриваемую здесь теорию  $H$ -подобных атомов к расчету энергетических уровней. Экспериментальные данные по энергетическим спектрам  $H$ -атомов были недавно получены [15 - 20] для целого ряда элементов:  $^{12}\text{C}$ ,  $^{24}\text{Mg}$ ,  $^{40}\text{Ar}$ ,  $^{52}\text{Cr}$ ,  $^{64}\text{Zn}$ ,  $^{84}\text{Kr}$ ,  $^{98}\text{Mo}$ ,  $^{238}\text{U}$  и др. Уровни энергий  $H$ -атома рассчитываются по формуле

$$E_{nl} = -\frac{\varepsilon_1 \alpha^2 Z^2}{2n^2} \frac{1}{\left(1 - 2 \frac{\hbar c}{\varepsilon_1^2} \gamma_{12} \cdot f_{10}\right)^2 + \zeta \left(1 - 2 \zeta^2 \frac{\hbar c}{\varepsilon_1^2} \gamma_{21} \cdot f_{10}\right)^2}. \quad (34)$$

Заметим, что из-за зависимости м.э. силы  $f_{nl}$  от двух квантовых чисел  $n$  и  $l$  (см. формулу (22)) энергетический спектр водородоподобных атомов в модели НОКР будет также зависеть от  $(n, l)$ . В нерелятивистской квантовой механике энергия уровня определяется, как известно, лишь главным квантовым числом  $n$ , точнее

$$E_n^{O.mech.} = -\frac{\varepsilon_1 \alpha^2 Z^2}{2n^2} \frac{1}{1 + \zeta^2}, \quad (35)$$

в то время как в теории Дирака она зависит не только от  $n$ , но и от полного спина  $\mathbf{j} = \mathbf{l} + \mathbf{s}$ :

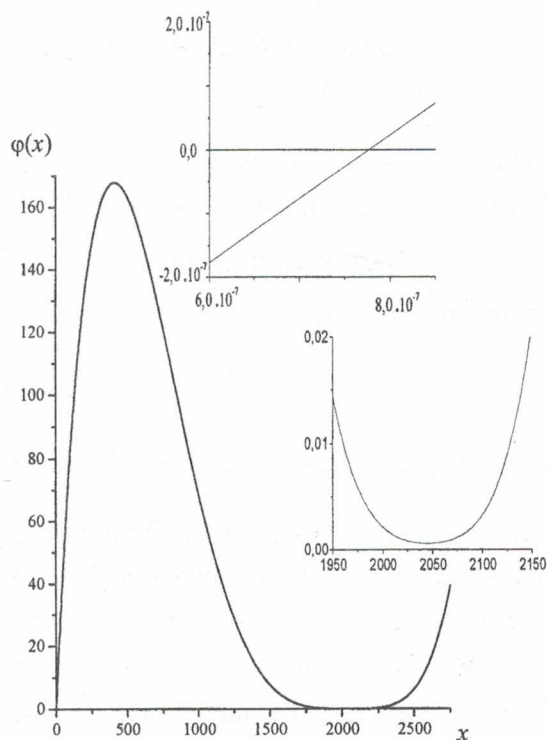
$$E_{nj}^{Dir.} = m_e c^2 \left[ 1 + \left( \frac{\alpha Z}{n - j - \frac{1}{2} + \sqrt{(j + \frac{1}{2})^2 - \alpha^2 Z^2}} \right)^2 \right]^{-1/2} - m_e c^2. \quad (36)$$

Величина  $\varepsilon_2$ , входящая в определение  $\zeta \equiv \varepsilon_1 / \varepsilon_2$ , вычисляется (см., например, [21]) согласно формуле  $\varepsilon_2 = A \cdot 1e + \Delta m_{12C}$ , где  $A$ -атомный номер ядра,  $1e = 931,441$  МэВ, а  $\Delta m_{12C}$  - избыток массы по шкале  $^{12}\text{C} = 12$ , выраженный в МэВ.

Ясно, что прежде чем приступить к решению алгебраического уравнения (33), необходимо выбрать соответствующие данному  $H$ -атому корреляционные множители  $\gamma_{12}$  и  $\gamma_{21}$ . Для этого можно привлечь то или иное надежно установленное экспериментальное значение энергий  $E_{nl}$ . При этом м.э. силы  $f_{nl}$  следует выразить через  $E_{nl}$  согласно вытекающей из выражений (24) и (34) формуле

$$f_{nl} = \frac{8n}{2l+1} \cdot \frac{E_{nl}^2}{\alpha Z \cdot \hbar c}. \quad (37)$$

Тогда корреляционный множитель  $\gamma_{12}$ , играющий в теории  $H$ -подобных атомов важную роль, выразится формулой



Функция  $\varphi(x)$  в случае основного состояния атома водорода.



$$\gamma_{12} = \frac{(2l+1)\alpha Z}{16n} \frac{\varepsilon_1^2}{E_{nl}^2} \times \left[ 1 - \frac{\alpha Z}{n} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{2|E_{nl}|}} \cdot \sqrt{1 - \frac{\xi n^2}{\alpha^2 Z^2} \cdot \frac{2|E_{nl}|}{\varepsilon_1} \left( 1 - \frac{16n}{2l+1} \cdot \frac{E_{nl}^2}{\alpha Z \varepsilon_1^2} \xi^2 \gamma_{21} \right)^2} \right]. \quad (38)$$

Что касается второго корреляционного множителя  $\gamma_{21}$ , то он, как отмечалось выше, является здесь несущественным. Ради определенности можно далее положить  $\gamma_{12} = \gamma_{21}$ .

Перейдем теперь к рассмотрению конкретных расчетов, которые выполним на примере хорошо экспериментально изученного  $H$ -атома  $^{12}\text{C}$ . В [20] имеются данные о 81 уровнях энергии  $H$ -атома  $^{12}\text{C}$ , точность которых равна  $\approx 10^{-4}$  эВ. При определении корреляционных множителей воспользуемся экспериментальным значением [20] энергии основного состояния  $H$ -атома  $^{12}\text{C}$ :  $E_{10} = -489,9933$  эВ. Необходимое для определения величины  $\xi = \varepsilon_1 / \varepsilon_2$  значение массы  $^{12}\text{C}$  будет равным  $\varepsilon_2 \equiv c^2 m_{^{12}\text{C}} = 11177,292$  МэВ. Подставляя эти значения в формулу (38), находим  $\gamma_{12} \approx 0,640255$ . Таким образом, имея все необходимые значения физических величин, входящих в уравнение (34), можно приступить к расчету энергетических уровней  $H$ -атома  $^{12}\text{C}$ . При этом вначале находятся корни алгебраического (5-й степени относительно  $f_{nl}$ ) уравнения (24) для соответствующих значений квантовых чисел  $n$  и  $l$ . Затем, зная величину м.э. силы  $f_{nl}$ , определяем энергию  $E_{nl}$ , причем проще рассчитывать  $E_{nl}$  не по формуле (34), а по формуле (37), т.е.

$$E_{nl} = -\sqrt{\frac{2l+1}{8n} \cdot \alpha Z \cdot \hbar c \cdot f_{nl}}. \quad (39)$$

Результаты такого расчета, вместе с имеющимися экспериментальными данными [20], представлены в таблице. Отсчет энергетических уровней  $E_{nl}$  проводился от энергии основного состояния водородоподобного атома  $^{12}\text{C}$ , точнее

$$E_{nl} \Rightarrow E_{nl} - E_{10}; E_n^{Q.mech.} \Rightarrow E_n^{Q.mech.} - E_1^{Q.mech.}; E_{nj}^{Dir.} \Rightarrow E_{nj}^{Dir.} - E_{1, \frac{1}{2}}^{Dir.}. \quad (40)$$

При этом в первом столбце таблицы указаны квантовые числа уровня ( $n, l, j$ ), а во втором - экспериментальные значения энергий  $E_{nl}^{exp.}$ . В 3-м, 4-м и 5-м столбцах приведены значения отклонений теоретических величин  $E_{nl}, E_n^{Q.mech.}, E_{nj}^{Dir.}$  от соответствующего экспериментального значения  $E_{nl}^{exp.}$ , т. е.

$$\delta E_1 \equiv E_{nl} - E_{nl}^{exp.}; \delta E_2 \equiv E_n^{Q.mech.} - E_n^{exp.}; \delta E_3 \equiv E_{nj}^{Dir.} - E_{nj}^{exp.}. \quad (41)$$

И, наконец, в последнем столбце таблицы даны значения корня  $x_{nl} \equiv \frac{\hbar c}{\varepsilon_1} f_{nl}$  алгебраического уравнения (24) для каждого ( $n, l$ )-уровня, причем приведенные здесь конкретные значения  $x_{nl}$  обеспечивают точность решения (24)  $\sim 10^{-21}$ .

Как видно из таблицы, наилучшее описание получилось в модели НОКР (среднее отклонение от экспериментальных величин  $\delta E_1 \equiv \sum_i \delta E_1^{(i)} / 81 = 0,3120 / 81 \approx 0,00385$  эВ). Формула теории Дирака дает более чем на порядок худшее приближение по сравнению с моделью НОКР (среднее отклонение  $\delta E_3 \equiv \sum_i \delta E_3^{(i)} / 81 = 3,7010 / 81 \approx 0,04569$  эВ). Еще менее точное описание экспериментальных величин  $E_{nl}^{exp.}$  получается в случае формулы  $E_n^{Q.mech.}$  (здесь среднее отклонение  $\delta E_2 \equiv \sum_i \delta E_2^{(i)} / 81 = 16,7521 / 81 \approx 0,20682$  эВ).



Энергетические уровни *H*-подобного атома углерода-12, (энергии ( $E, \delta E_i$ ) даны в электрон-

вольтах; безразмерная величина  $x_{nl}$  связана с м.э. силы соотношением  $x_{nl} \equiv \frac{\hbar c}{\varepsilon_1^2} f_{nl}$ ).

$\{n, l, j\}$	$E_{nl}^{\text{exp}}$	$\delta E_1$	$\delta E_2$	$\delta E_3$	$x_{nl}$
1s{1,0,1/2}	-489,9933	0,0000	0,2108	-0,0465	$0,168001731837749423 \cdot 10^{-3}$
2p{2,1,1/2}	367,4741	0,0714	-0,1374	0,0411	$0,69943012924334 \cdot 10^{-5}$
2p{2,1,3/2}	367,5330	0,0125	-0,1961	0,0410	$0,699430129243343 \cdot 10^{-5}$
2s{2,0,1/2}	367,4774	0,0637	-0,1407	0,0378	$0,209844074797524 \cdot 10^{-4}$
3p{3,1,1/2}	435,5469	0,0258	-0,1849	0,0411	$0,2072333324964547 \cdot 10^{-5}$
3p{3,1,3/2}	435,5643	0,0084	-0,2023	0,0411	$0,2072333324964547 \cdot 10^{-5}$
3s{3,0,1/2}	435,5478	0,0244	-0,1856	0,0432	$0,6217131956770372 \cdot 10^{-5}$
3d{3,2,3/2}	435,6543	0,0085	-0,2020	0,0411	$0,1243394715922197 \cdot 10^{-5}$
3d{3,2,5/2}	435,5701	0,0027	-0,2079	0,0411	$0,1243394715922197 \cdot 10^{-5}$
4p{4,1,1/2}	459,3699	0,0045	-0,2062	0,0452	$0,87426025672203 \cdot 10^{-6}$
4p{4,1,3/2}	459,3773	0,0119	-0,1988	0,0453	$0,87426025672203 \cdot 10^{-6}$
4s{4,0,1/2}	459,3704	0,0113	-0,1993	0,0448	$0,2622804259167675 \cdot 10^{-5}$
4d{4,2,3/2}	459,3773	0,0046	-0,2062	0,0452	$0,524555214489563 \cdot 10^{-6}$
4d{4,2,5/2}	459,3797	0,0021	-0,2086	0,0452	$0,524555214489563 \cdot 10^{-6}$
4f{4,3,5/2}	459,3797	0,0022	-0,2086	0,0452	$0,374682008449765 \cdot 10^{-6}$
4f{4,3,7/2}	459,3810	0,0009	-0,2099	0,0452	$0,374682008449765 \cdot 10^{-6}$
5p{5,1,1/2}	470,3956	0,0064	-0,2044	0,0457	$0,447620273314724 \cdot 10^{-6}$
5p{5,1,3/2}	470,3994	0,0026	-0,2082	0,0457	$0,447620273314724 \cdot 10^{-6}$
5s{5,0,1/2}	470,3958	0,0061	-0,2046	0,0455	$0,1342866977357545 \cdot 10^{-5}$
5d{5,2,3/2}	470,3994	0,0026	-0,2082	0,0457	$0,268571917694502 \cdot 10^{-6}$
5d{5,2,5/2}	470,4006	0,0014	-0,2094	0,0457	$0,268571917694502 \cdot 10^{-6}$
5f{5,3,5/2}	470,4006	0,0014	-0,2094	0,0457	$0,191837008671438 \cdot 10^{-6}$
5f{5,3,7/2}	470,4012	0,0008	-0,2100	0,0458	$0,191837008671438 \cdot 10^{-6}$
5g{5,4,7/2}	470,4012	0,0008	-0,2100	0,0458	$0,149206529721493 \cdot 10^{-6}$
5g{5,4,9/2}	470,4016	0,0004	-0,2104	0,0457	$0,149206529721493 \cdot 10^{-6}$
6p{6,1,1/2}	476,3844	0,0038	-0,2070	0,0460	$0,259039259820245 \cdot 10^{-6}$
6p{6,1,3/2}	476,3866	0,0016	-0,2092	0,0460	$0,259039259820245 \cdot 10^{-6}$
6s{6,0,1/2}	476,3845	0,0037	-0,2071	0,0459	$0,777119841553068 \cdot 10^{-6}$
6d{6,2,3/2}	476,3866	0,0016	-0,2092	0,0460	$0,15542347340888 \cdot 10^{-6}$
6d{6,2,5/2}	476,3873	0,0009	-0,2099	0,0460	$0,15542347340888 \cdot 10^{-6}$
6f{6,3,5/2}	476,3873	0,0009	-0,2099	0,0460	$0,11101674147068 \cdot 10^{-6}$
6f{6,3,7/2}	476,3877	0,0005	-0,2103	0,0460	$0,11101674147068 \cdot 10^{-6}$
6g{6,4,7/2}	476,3877	0,0005	-0,2103	0,0460	$0,8634634356673 \cdot 10^{-7}$
6g{6,4,9/2}	476,3879	0,0003	-0,2105	0,0460	$0,8634634356673 \cdot 10^{-7}$
6h{6,5,9/2}	476,3879	0,0003	-0,2105	0,0460	$0,70647002692126 \cdot 10^{-7}$
6h{6,5,11/2}	476,3881	0,0001	-0,2107	0,0459	$0,70647002692126 \cdot 10^{-7}$
- - - - -	- - - - -	- - - - -	- - - - -	- - - - -	- - - - -
9l{9,8,17/2}	483,9466	0,0000	-0,2108	0,0463	$0,13544519430618 \cdot 10^{-7}$



Среди рассматриваемых здесь результатов важным, с нашей точки зрения, представляется также вывод об увеличении “самосогласованно перенормируемых” масс взаимодействующих частиц - электрона и  $Z$ -ядра. Если, например, в атоме водорода “перенормируемая” масса электрона увеличивается, по сравнению с массой свободной частицы, всего лишь на 0,000388 эВ, то в случае  $H$ -атома  $^{12}C$  “прирост” массы электрона является уже весьма заметным. Косвенное указание на “перенормировку” масс взаимодействующих частиц содержится и в расчете энергетического спектра  $H$ -атома  $^{12}C$  по формуле (36) теории Дирака. Действительно, как видно из таблицы, отклонение теоретических величин от экспериментальных  $\delta E_3$  для всех  $(n, j)$ -уровней остается примерно постоянным. Поэтому, сместив основное  $(1, \frac{1}{2})$ -состояние, скажем, на величину  $\delta \bar{E}_3$ , и не меняя при этом положений возбужденных уровней, очевидно, получим существенно лучшее описание экспериментальной ситуации. Чтобы “совместить”  $E_{1,1/2}^{Dir.}$  с экспериментальной величиной, необходимо в 1-м слагаемом правой части формулы (36) увеличить массу электрона на  $\Delta m_e c^2 \approx \delta E_3^{(1)} / \sqrt{1 - \alpha^2 Z^2} = 0,0466165$  эВ, не изменяя при этом энергию покоя  $m_e c^2$  во втором слагаемом этой же формулы. Ясно, что для возбужденных состояний данный сдвиг, по сравнению с основным состоянием, должен быть малозначительным. Именно такое поведение массы электрона в зависимости от рассматриваемого состояния  $H$ -атома  $^{12}C$  получается в модели НОКР. В частности, согласно модели НОКР, отношение величин  $\Delta m_e c^2$  для основного  $1s$ -состояния и для первого возбужденного  $2p$ -состояния равно

$$\frac{\Delta m_e c^2(1s)}{\Delta m_e c^2(2p)} = \left[ 1 - \frac{1}{1 - 2\gamma_{12} \cdot x_{10}} \right] \div \left[ 1 - \frac{1}{1 - 2\gamma_{12} \cdot x_{20}} \right] \approx 24,027; \quad (42)$$

аналогичная величина в случае последнего  $(9l)$ -состояния будет  $\Delta m_e c^2(1s) / \Delta m_e c^2(9l) \approx 12409,672$ , т.е. для высоко возбужденных состояний увеличение массы электрона оказывается малозаметным по сравнению с  $\Delta m_e c^2$  для основного состояния.

В завершение рассмотрения спектра энергетических уровней  $H$ -подобных атомов остановимся кратко на вопросе ортогональности волновых функций (18). В модели НОКР, как это легко видеть из соотношения (23), имеется зависимость размерного параметра  $a_0$  (боровского радиуса) от конкретно рассматриваемого  $(nl)$ -уровня. Поэтому некоторые функции  $\psi_{nlm}(\mathbf{r})$  будут, вообще говоря, не ортогональны между собой, т.е. будет отличен от нуля интеграл перекрытия

$$j_{nl, n'l} \equiv \int \psi_{nlm}(\mathbf{r}) \psi_{n'l m}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \int_0^\infty R_{nl}(r) R_{n'l}(r) r^2 dr. \quad (43)$$

Ясно, что это обстоятельство может поставить под сомнение некоторые полученные выше результаты модели НОКР, если интеграл  $j_{nl, n'l}$  будет заметно отличен от нуля. В связи с этим оценим интеграл  $j_{nl, n'l}$  на примере  $1s$ - и  $2s$ -состояний атома водорода и  $H$ -атома  $^{12}C$ . Учитывая формулу (20), записываем необходимый интеграл перекрытия

$$j_{1s, 2s} \equiv \int_0^\infty R_{10}(r) R_{20}(r) r^2 dr = \left( \frac{2}{a_0 \tilde{a}_0} \right)^{3/2} \left( \frac{1}{\tilde{a}_0} + \frac{1}{2a_0} \right)^{-3} \left[ 1 - \frac{3}{2a_0} \left( \frac{1}{\tilde{a}_0} + \frac{1}{2a_0} \right)^{-1} \right], \quad (44)$$

где

$$\begin{aligned}\tilde{a}_o &= \frac{\hbar c}{\alpha \varepsilon_1} \left[ \left( 1 - \gamma_{12} \frac{2\hbar c}{\varepsilon_1^2} \cdot f_{10} \right)^2 + \xi \left( 1 - \gamma_{21} \frac{2\hbar c}{\varepsilon_1^2} \cdot \xi^2 f_{10} \right)^2 \right], \\ a_o &= \frac{\hbar c}{\alpha \varepsilon_1} \left[ \left( 1 - \gamma_{12} \frac{2\hbar c}{\varepsilon_1^2} \cdot f_{20} \right)^2 + \xi \left( 1 - \gamma_{21} \frac{2\hbar c}{\varepsilon_1^2} \cdot \xi^2 f_{20} \right)^2 \right].\end{aligned}\quad (45)$$

Подставляя сюда численные значения для атома водорода  $x_{10} \equiv \frac{\hbar c}{\varepsilon_1^2} f_{10} \approx 0,776342 \cdot 10^{-6}$ ,

$x_{20} \equiv \frac{\hbar c}{\varepsilon_1^2} f_{20} \approx 0,970373 \cdot 10^{-7}$  и  $H$ -атома  $^{12}\text{C}$   $x_{10} \approx 0,168002 \cdot 10^{-3}$ ,  $x_{20} \approx 0,209844 \cdot 10^{-4}$  (см.

таблицу), находим интеграл  $j_{1s,2s} \approx 3,709 \cdot 10^{-10}$  в случае атома водорода и  $j_{1s,2s} \approx 0,000210$  в случае  $H$ -атома  $^{12}\text{C}$ . Полученные оценки очевидно говорят о том, что столь мизерная величина перекрытия между  $1s$ - и  $2s$ -состояниями вряд ли может повлиять существенным образом на расположение этих уровней энергии, рассчитываемых в рамках модели НОКР. Более детальное рассмотрение затронутых здесь вопросов, касающихся не только  $H$ -атомов, но и легчайших ядер – дейтрона, трития и гелия-3, можно найти в общедоступном архиве известного научного центра из Лос-Аламоса [22, 23].

### Выводы

1. Из гипотезы о некоммутативности оператора координат и оператора импульса для одной частицы логически следует некоммутативность оператора координат и оператора импульса разных частиц. Важную роль в данной модели играет м.э. силы, для вычисления которого необходимо решить специфическое нелинейное уравнение (аналог уравнения Шредингера). При этом наиболее существенный параметр нелинейности оказывается пропорциональным отношению м.э. силы к величине  $(m_o c^2)^2 / \hbar c$ , где  $m_o$  – масса самой легкой из частиц, которые составляют данную систему. Рассмотренное в работе обобщение традиционной квантовой механики указывает на возможность проявления новых физических закономерностей. В качестве примера можно упомянуть зависимость „согласовано перенормируемой” массы частицы от силы ее взаимодействия с другими частицами. Модель устанавливает верхний предел для м.э. силы

$$f_{nl} < \frac{1}{2\gamma_o} \cdot \frac{(m_o c^2)^2}{\hbar c}, \quad (46)$$

за которым теряется само понятие „частица”. В этой связи напрашивается занятная аналогия со специальной теорией относительности, где скорость частицы  $v$  не может превысить скорость света  $c$  и где фигурирующая в формуле (46) величина  $m_o^2 c^4$  связывается с инвариантностью 4-го вектора энергии импульса по отношению к преобразованию Лоренца. Уместно также напомнить, что и теория Дирака дает известное ограничение на величину силы взаимодействия заряженных частиц ( $Z_{crit.} \sim 137$ ). В нашем подходе кулоновское взаимодействие – ничем не выделенный пример силы взаимодействия.

2. Рассчитанные в рамках модели спектры некоторых легких ( $Z < 10$ )  $H$ -подобных атомов хорошо согласуются с экспериментальными величинами. В частности, результаты расчета энергетического спектра  $H$ -атома  $^{12}\text{C}$  оказались на порядок лучше, чем соответствующие значения, полученные по известной формуле для энергетического спектра водородоподобного атома в теории Дирака.



## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Kuzmenko M.V.* // Phys. Rev. - 2000. - Vol. A61.- P. 014101.
2. *Kuzmenko M.V.* // Preprint: quant-ph/0307195. - 2003.
3. *Мессиа Альберт.* Квантовая механика. - М.: Наука, 1978. - Т. 1. - С. 15.
4. *Давыдов А.С.* Квантовая механика. - М.: Наука, 1973.
5. *Паули В.* Труды по квантовой теории. - М.: Наука, 1975. - Т. 1.
6. *Гейзенберг В.* // УФН. - 1977. - Т. 122, № 4. - С. 657.
7. *Шредингер Э.* К принципу неопределенности Гейзенберга. // Избранные труды по квантовой механике. - М.: Наука, 1976. - С. 210.
8. *Суханов А.Д.* // ЭЧАЯ. - 2001. - Т. 32, вып. 5. - С. 1177.
9. *Суханов А.Д.* // ТМФ. - 2002. - Т. 132, №3. - С. 449.
10. *Мигдал А.Б.* Качественные методы в квантовой теории. - М.: Наука, 1975.
11. *Варшалович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К.* Квантовая теория углового момента. - Л.: Наука, 1975.
12. *Соколов А.А., Тернов И.М.* Квантовая механика и атомная физика. - М.: Просвещение, 1970.
13. *Лебедев Н.Н.* Специальные функции и их приложения. - Л.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1963.
14. *Mohr P.J., Taylor B.N.* // Physics Today. - 2002. - Vol. BG6.
15. *Udem Th., Huber A., Gross B. et al.* // Phys. Rev. Lett. - 1997. - Vol. 79. - P. 2646.
16. *Eides M.I., Grotch H., Shelyuto V.A.* // Phys. Rep. - 2001. - Vol. 342. - P. 63.
17. *Stohlker Th., Mokler P.H., Bosch F. et al.* // Phys. Rev. Lett. - 2000. - Vol. 85. - P. 3109.
18. *Schwepper J., Belkacem A., Blumenfeld L. et al.* // Phys. Rev. Lett. - 1991. - Vol. 66. - P. 1434.
19. *Beierdofer P., Knapp D., Marrs R.E. et al.* // Phys. Rev. Lett. - 1993. - Vol. 71. - P. 3939.
20. *NIST Atomic Spectra Databases* (<http://physics.nist.gov>).
21. *Кравцов В.А.* Массы атомов и энергия связи ядер. - М.: Атомиздат, 1965.
22. *Steshenko A.I.* // arXiv:nucl-th/0410018, Oct. 2004, 18 p., 1 fig., 2 tables.
23. *Steshenko A.I.* // arXiv:nucl-th/0410118, Oct. 2004, 14 p., 3 tables.

**НЕРЕЛЯТИВІСТСЬКА КВАНТОВА МЕХАНІКА ВЗАЄМОДІЮЧИХ ЧАСТИНОК  
ТА КОРЕЛЯЦІЙНІ СПІВВІДНОШЕННЯ „КООРДИНАТА - ІМПУЛЬС”**

А. Й. Стешенко

Розглянуто квантово-механічну модель взаємодіючих частинок з урахуванням некомутативності операторів координат та імпульсів, а також кореляційних рівностей для невизначеностей названих величин. Некомутативність операторів тут обумовлена дією міжчастинкових сил і є узагальненням комутаційного співвідношення для оператора координати та оператора імпульсу у випадку однієї частинки. Ефективність моделі засвідчили конкретні розрахунки воднеподібних атомів.

**NONRELATIVISTIC QUANTUM MECHANICS OF THE INTERACTING PARTICLES  
AND THE COORDINATE - IMPULSE CORRELATION RELATIONS**

A. I. Steshenko

A quantum mechanical model for a system of interacting bodies, taking into account noncommutativity of the coordinate and impulse operators for different particles and also the correlation equalities, is considered. The noncommutativity of the operators is here the result of the action of interparticle forces and represents natural generalization of the conventional commutation relation between the coordinate and impulse operators for a single particle. The efficiency of the model is evidenced by the specific calculations of well-known systems of atomic physics.

Поступила в редакцію 12.01.05,  
после доработки – 05.05.05.