

РАСЧЕТ СЕЧЕНИЯ ПРОЦЕССА ${}^3\text{He}(e, e'p){}^2\text{H}$ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ВОЛНОВЫХ ФУНКЦИЙ ФАДДЕЕВСКОГО ТИПА

В. К. Тартаковский^{1,2}, Е. М. Малярж²

¹ *Институт ядерных исследований НАН Украины, Киев*

² *Институт теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова НАН Украины, Киев*

Предложен метод построения трехнуклонных волновых функций системы “протон - дейтрон” с использованием уравнений Фаддеева и гиперсферических функций, с которыми рассчитано сечение процесса ${}^3\text{He}(e, e'p){}^2\text{H}$.

В настоящей работе произведен расчет дифференциального сечения реакции ${}^3\text{He}(e, e'p){}^2\text{H}$ с использованием построенной на основе метода К-гармоник волновой функции фаддеевского типа для системы “протон - дейтрон” в приближении основной гармоники, ортогональной волновой функции ядра ${}^3\text{He}$.

Электродезинтеграция ядра ${}^3\text{He}$ на протон и дейтрон как экспериментально, так и теоретически исследовалась ранее в работах [1 - 7]. В частности, в работе [3] эксперименты на совпадение [1, 2] описывались с использованием волновых функций трехнуклонных систем, участвующих в процессе ${}^3\text{He}(e, e'p){}^2\text{H}$, рассчитанных по методу К-гармоник [8], исходя из заданных NN-потенциалов взаимодействия, а в работе [4] эти же эксперименты описывались ядерными волновыми функциями, найденными из уравнений Фаддеева [9] с сепарабельными NN-потенциалами. Расчеты волновых функций и сечений в работах [3, 4] отличаются большой сложностью и трудоемкостью и не позволили до конца достаточно хорошо описать эксперименты [1, 2].

Предлагаем новый, отличающийся простотой приближенный метод расчета ядерных волновых функций и сечения процесса ${}^3\text{He}(e, e'p){}^2\text{H}$, основанный на использовании ряда свойств точных уравнений Фаддеева [9, 10] и гиперсферических функций [8, 10] при нахождении трехнуклонных волновых функций непрерывного спектра энергий. Метод позволяет избежать громоздких, требующих больших временных затрат, численных расчетов, как в [3, 4], и получить даже при учете лишь одной основной К-гармоники ($K = 0$) приблизительно такое же согласие с экспериментом [1, 2], как в работе [3], где использовались разложения по гиперсферическим функциям, и как в работе [4], где, как и здесь у нас, использовались уравнения Фаддеева.

Радиусы-векторы трех нуклонов \vec{r}_1 , \vec{r}_2 и \vec{r}_3 отсчитываем от центра инерции трехнуклонной системы ($\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3 = 0$) и вводим еще два других относительных радиуса вектора $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_3$ и $\vec{\rho}_1 = \vec{r}_1 - \frac{\vec{r}_2 + \vec{r}_3}{2} = \frac{3}{2}\vec{r}_1$, а также глобальную (коллективную) переменную

$\rho = \left(\frac{1}{2}\vec{r}^2 + \frac{2}{3}\vec{\rho}_1^2 \right)^{1/2}$. В этих переменных волновую функцию основного состояния ядра ${}^3\text{He}$ в минимальном К-гармоническом приближении ($K = 0$) выбираем в виде следующей модельной функции, имеющей правильную асимптотику на больших расстояниях между нуклонами [10]:

$$\Psi_0 \equiv \Psi_0(\rho) = \frac{\sqrt{2\gamma}}{3^{3/4} \pi^{3/2}} \cdot \frac{e^{-\gamma\rho}}{\rho^{5/2}}, \quad \gamma = \frac{\sqrt{2ME_0}}{\hbar}, \quad 3^{3/2} \pi^3 \int_0^\infty d\rho \rho^5 \Psi_0^2(\rho) = 1, \quad (1)$$

где M – масса нуклона; $E_0 \approx 7,7$ МэВ есть энергия связи ядра ${}^3\text{He}$.

Волновую функцию φ_1 конечного состояния, в котором только два нуклона связаны, записываем, согласно уравнению Фаддеева, в виде суперпозиции двух слагаемых

$$\varphi_1 = e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\vec{\rho}_1} \varphi_0(r) + f(\vec{r}, \vec{\rho}_1), \quad (2)$$

где первое слагаемое в правой части равенства (2) представляет собой асимптотическую волновую функцию в виде произведения внутренней волновой функции дейтрона $\varphi_0(r)$ и волновой функции относительного движения с относительным импульсом \vec{p} невзаимодействующих дейтрона и 1-го нуклона (протона), а второе слагаемое $f(\vec{r}, \vec{\rho}_1)$ является сложной по конструкции частью функции (2), зависящей от взаимодействия всех трех нуклонов и включающей в себя двухчастичные операторы переходов [9, 10].

Однако второе слагаемое $f(\vec{r}, \vec{\rho}_1)$ в равенстве (2) имеет, в отличие от первого слагаемого в нем, одно замечательное свойство: функция $f(\vec{r}, \vec{\rho}_1)$ разлагается в быстросходящийся ряд по гиперсферическим функциям, и мы далее используем это свойство, оставляя в указанном ряду лишь одно первое не исчезающее слагаемое (с $K = 0$).

Но значительно более простое первое слагаемое в равенстве (2) $e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\vec{\rho}_1} \varphi_0(r)$, не разлагающееся в быстросходящийся ряд по K -гармоникам, оставляем в (2) без изменений. Поскольку слагаемое $f(\vec{r}, \vec{\rho}_1)$ будет зависеть в нашем приближении ($K = 0$) только от ρ и для короткодействующих NN-потенциалов быстро спадает с увеличением ρ , то это слагаемое в этом случае будет пропорционально волновой функции связанного состояния (1), что находится в соответствии с известной ядерной интерполяционной моделью [3, 10 - 12].

Таким образом, функцию $f(\vec{r}, \vec{\rho}_1)$ в используемом приближении можно представить в виде произведения функции (1) и некоторого множителя $C(p)$, уже не зависящего от пространственных координат, но зависящего от величины относительного импульса p . И конечная волновая функция фаддеевского типа φ_1^0 будет иметь в нашем приближении следующий простой вид:

$$\varphi_1^0 = \varphi_0(r) e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\vec{\rho}_1} + C(p) \Psi_0(\rho). \quad (3)$$

Коэффициент $C(p)$ найдем из ортогональности волновых функций (3) и (1) ($r = \sqrt{2}\rho \cos\theta$, $\rho_1 = \sqrt{3/2}\rho \sin\theta$) как

$$\int d\vec{r} \int d\vec{\rho}_1 \varphi_1^0 \Psi_0 \equiv 3^{3/2} \int_0^\infty d\rho \rho^5 \Psi_0(\rho) \int d\Omega_5 \varphi_1^0 = 0,$$

где $d\Omega_5 = \sin^2\theta \cos^2\theta d\theta d\Omega_r d\Omega_{\rho_1}$, откуда получаем

$$C(p) = -16\pi^2 \cdot 3^{3/2} \int_0^\infty d\rho \rho^5 \Psi_0(\rho) \int_0^{\pi/2} d\theta \sin^2\theta \cos^2\theta \varphi_0(\sqrt{2}\rho \cos\theta) j_0\left(\sqrt{\frac{3}{2}}p\rho \sin\theta\right). \quad (4)$$

При расчетах использовалась простая дейтронная волновая функция, имеющая правильное асимптотическое поведение на бесконечности

$$\varphi_0(r) = \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}} \frac{e^{-\alpha r}}{r}, \quad \alpha = \frac{\sqrt{M\varepsilon_0}}{\hbar}, \quad \varepsilon_0 \approx 2,23 \text{ МэВ}. \quad (5)$$

Для удобства будем в дальнейшем использовать систему единиц, где $\hbar = c = 1$.

Дифференциальное сечение на совпадение σ двухчастичного электрорасщепления ядра ${}^3\text{He}$ для компланарной кинематики (геометрии) эксперимента [1, 2] можно записать в сравнительно простом виде в лабораторной системе отсчета, в которой ядро ${}^3\text{He}$ покоится. Мы учли в сечении σ лишь одно слагаемое, дающее определяющий вклад в области максимума сечения как функции угла вылета протона θ_p [7]. Усредненное по направлениям спинов падающего электрона и ядра ${}^3\text{He}$ и просуммированное по проекциям спинов всех конечных частиц это сечение будет иметь следующий вид:

$$\sigma \equiv \frac{d^5\sigma}{dk_f d\Omega_f d\Omega_p} = \frac{M}{3(2\pi)^3} \sigma_0(\theta_f) \frac{(Q + \sqrt{Q^2 + 9p^2 - q^2})^2}{\sqrt{Q^2 + 9p^2 - q^2}} \times \\ \times \left\{ \left[F_1 - (F_1 + 2\kappa F_2) \frac{q^2 - \omega^2}{8M^2} \right]^2 + (F_1 + \kappa F_2)^2 \frac{q^2}{2M^2} \left(\text{tg}^2 \frac{\theta_f}{2} + \frac{1}{2} \right) \right\} |\langle \varphi_1 | e^{i\vec{q}\vec{r}_1} | \Psi_0 \rangle|^2. \quad (6)$$

Здесь $d\Omega_f$ и $d\Omega_p$ – элементы телесных углов, в которых лежат импульсы рассеянного электрона и возникающего протона; θ_f – угол рассеяния электрона; $\sigma_0(\theta_f)$ – сечение Мотта с учетом отдачи [7]; $\vec{q} = \vec{k}_i - \vec{k}_f$ и $\omega = k_i - k_f$ – переданные импульс и энергия $Q = k_i \cos \theta_p - k_f \cos(\theta_f + \theta_p)$; F_1 и F_2 – протонные формфакторы Дирака и Паули; $\kappa \approx 1,79$ – аномальный магнитный момент протона в ядерных магнетонах. При расчетах использовалась следующая зависимость протонных формфакторов от переданного импульса:

$$F_1 = F = \left(1 + \frac{q^2 \langle r^2 \rangle}{12} \right)^{-2}, \quad \text{где } \sqrt{\langle r^2 \rangle} = 0,8 \text{ фм.}$$

Входящий в выражение (6) матричный элемент перехода можно в наших обозначениях приближенно представить в виде

$$\langle \varphi_1 | e^{i\vec{q}\vec{r}_1} | \Psi_0 \rangle \equiv \int d\vec{r} \int d\vec{p}_1 \varphi_1^* e^{i\vec{q}\vec{r}_1} \Psi_0 \cong 16\pi^2 \cdot 3^{3/2} \int_0^\infty d\rho \rho^4 \Psi_0(\rho) \times \\ \times \left[\left| \sqrt{\frac{2}{3}} \vec{q} - \sqrt{\frac{3}{2}} \vec{p} \right|^{-1} \int_0^{-\pi/2} d\theta \sin \theta \cos^2 \theta \varphi_0(\sqrt{2}\rho \cos \theta) \sin \left(\left| \sqrt{\frac{2}{3}} \vec{q} - \sqrt{\frac{3}{2}} \vec{p} \right| \rho \sin \theta \right) + \right. \\ \left. + \frac{C(p)}{\sqrt{\frac{2}{3}} q} \Psi_0(\rho) \int_0^{\pi/2} d\theta \sin \theta \cos^2 \theta \sin \left(\sqrt{\frac{2}{3}} q \rho \sin \theta \right) \right]. \quad (7)$$

Заметим, что $\vec{q}\vec{p} = \frac{1}{3} (Q^2 - q^2 + Q\sqrt{Q^2 + 9p^2 - q^2})$.

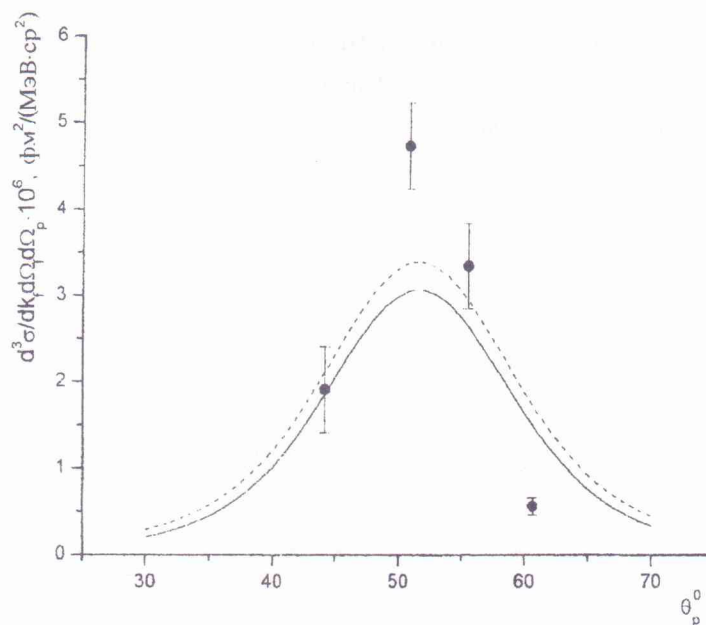
Эксперимент [1, 2] проводился для энергий электронов $k_i = 550$ МэВ, $k_f = 443$ МэВ и угле их рассеяния $\theta_f = 51,7^\circ$. При этом $p = 1,463$ фм $^{-1}$ и $C(p) = -1,2424$ фм $^{3/2}$. Значение относительной кинетической энергии движения несвязанных протона и дейтрона в области максимума сечения будет меньше 100 МэВ (в самом максимуме ≈ 60 МэВ) и поэтому необходимо учитывать взаимодействие в конечном состоянии между продуктами реакции, что учитывается в формуле (3).

Рассчитанная зависимость сечения (6) и (7) от угла вылета протона для указанных кинематических данных представлена на рисунке. Здесь же нанесены экспериментальные значения сечения с погрешностями, взятые из работы [1], но в интерпретации авторов работы [2], где были более тщательно обработаны данные работы [1]. Сплошная кривая – соответствует расчетам с волновой функцией фаддеевского типа (3), а штриховая – плосковолновому приближению, когда опускалось второе слагаемое в (3) с множителем $C(p)$.

В самом максимуме сечение σ для $\theta_p \approx 52^\circ$ при учете взаимодействия в конечном состоянии (сплошная кривая) равно приблизительно значению $3,1 \cdot 10^{-6} \text{ фм}^2 / (\text{МэВ} \cdot \text{ср}^2)$, а в плосковолновом приближении (штриховая кривая) – значению $3,4 \cdot 10^{-6} \text{ фм}^2 / (\text{МэВ} \cdot \text{ср}^2)$.

Это всего лишь на несколько процентов меньше соответствующих значений сечений в максимумах в работах [3, 4], где использовались при расчетах более точные волновые функции. Наши колоколообразные кривые имеют кроме того несколько увеличенные ширины по сравнению с ширинами максимумов в [3, 4]. Значение угла $\theta_p \approx 52^\circ$ для максимума сечения соответствует примерно такому же направлению импульса улетающего протона, что и направление переданного импульса \vec{q} .

Отметим, что предложенная в настоящей работе приближенная волновая функция системы “протон - дейтрон” (3), учитывающая взаимодействие между несвязанными протоном и дейтроном и близкая к решению уравнения Фаддеева, может использоваться во многих других физических задачах, где имеются подобные системы. В принципе расчет можно уточнить, если учесть в разложениях волновых функций трехнуклонных систем следующие члены с гиперсферическими функциями с гармониками $K \neq 0$.



СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Johansson A. // Phys. Rev. - 1964. - Vol. 136, No. 4B. - P. B1030 - B1035.
2. Gibson B.F., West G.B. // Nucl. Phys. - 1967. - Vol. B1, No. 7. - P. 349 - 361.
3. Тартаковский В.К. // ЯФ. - 1974. - Т. 20, вып. 1. - С. 46 - 54.
4. Heimbach C.R., Lehman D.R., O'Connell J.S. // Phys. Lett. - 1977. - Vol. 66B, No. 1. - P. 1 - 4.
5. Гольдштейн В.А., Купленников Э.Л., Малярж Е.М. и др. // УФЖ. - 1979. - Т. 24, № 13. - С. 1835 - 1838.
6. Kozlovsky I.V., Goldshtein V.A., Kuplennikov E.L. et al. // Nucl. Phys. - 1981. - Vol. A368, No. 3. - P. 493 - 502.
7. Ахизер А.И., Ситенко А.Г., Тартаковский В.К. Электродинамика ядер. - Киев: Наук. думка, 1989. - 432 с.
8. Симонов Ю.А. // ЯФ. - 1966. - Т. 3, вып. 4. - С. 630 - 638.
9. Фаддеев Л.Д. // ЖЭТФ. - 1960. - Т. 39, вып. 5(11). - С. 1459 - 1467.
10. Ситенко О.Г., Тартаковский В.К. Теория ядра. - Київ: Либідь, 2000. - 608 с.
11. Базь А.И. Модель уравнений ядерной физики. - Киев, 1971. - 38 с. - (Препр. / АН УССР. Ин-т теорет. физики; ИТФ-71-79р).
12. Базь А.И., Жуков М.В. // ЯФ. - 1972. - Т. 6, вып. 1. - С. 60 - 73.

**РОЗРАХУНОК ПЕРЕРІЗУ ПРОЦЕСУ ${}^3\text{He}(e, e'){}^2\text{H}$ З ВИКОРИСТАННЯМ
ХВИЛЬОВИХ ФУНКЦІЙ ФАДДЕЄВСЬКОГО ТИПУ**

В. К. Тартаковський, О. М. Малярж

Для розрахунку перерізу процесу ${}^3\text{He}(e, e'){}^2\text{H}$ запропоновано метод побудови тринуклонних хвильових функцій системи "протон - дейтрон" з використанням рівнянь Фаддєєва і гіперсферичних функцій.

**CALCULATION OF THE ${}^3\text{He}(e, e'){}^2\text{H}$ PROCESS
WITH THE WAVE FUNCTIONS OF FADDEEV'S TYPE**

V. K. Tartakovsky, O. M. Malyarzh

The method of the construction the three-nucleon wave functions "proton - deuteron" system with using Faddeev equations and hyperspherical functions is proposed for calculation of the ${}^3\text{He}(e, e'){}^2\text{H}$ process cross-section.

Поступила в редакцію 20.02.04,
после доработки – 20.04.04.