

ВКБ-НАБЛИЖЕННЯ ДЛЯ ФУНКЦІЇ ГРІНА ДВОХ НЕВЗАЄМОДІЮЧИХ ЧАСТИНОК У ЗОВНІШНЬОМУ ЕЛЕКТРИЧНОМУ ПОЛІ

В. П. Вербицький, Л. Я. Жукалюк, К. О. Теренецький

Інститут ядерних досліджень НАН України, Київ

Отримано квазікласичний (ВКБ) вираз для функції Гріна двох частинок, які не взаємодіють між собою, у зовнішньому електричному полі. Досліджено радіальну залежність одержаного виразу. Показано суттєву просторову локалізацію дійсної частини цієї функції.

Дослідження взаємодії складних частинок з атомними ядрами з врахуванням декількох каналів реакцій вимагає розв'язку задачі багатьох тіл. Найпростіша з них - задача трьох тіл - передбачає розв'язок трьох рівнянь фаддєєвського типу [1, 2], які побудовані на двочастинкових операторах (функціях Гріна) і точно враховують граничні умови для кожного каналу, що досліджується.

У цій роботі розглянуто задачу побудови функції Гріна двох невзаємодіючих частинок у зовнішньому електричному полі. Поставлена задача не є чисто абстрактною. Подібна фізична ситуація наближено може реалізуватися у випадку взаємодії двокластерних систем (d , ${}^6\text{He}$ тощо) з важкими ядрами мішеней за прибор'єрних енергій. Тричастинкова амплітуда взаємодії двокластерних частинок з важкими ядрами мішеней за прибор'єрних енергій, як було показано, наприклад, у роботі [3], може бути виражена через двочастинкові оператори, що не містять потенціалу взаємодії між кластерами.

У нашому випадку припускалося, що двокомпонентна система (d), яка складається з нейтрального з масою m_n ("нейтрона") і зарядженого із зарядом Z_p (p -"протона") кластерів, рухається в полі нескінченно важкого ядра з зарядом Z_T та має енергію E (відносно силового центра) і взаємодія з ядром є чисто кулонівською.

Знайдено точний інтегральний вираз для функції Гріна, яка описує рух такої системи в електричному полі ядра (без міжкластерної взаємодії), та її аналітичний вираз у квазікласичному наближенні й досліджено радіальну та енергетичну залежності одержаного виразу.

ВКБ-наближення для функції Гріна

Спосіб побудови багаточастинкових функцій Гріна, знаючи аналітичні вирази одностинкових функцій, добре відомий [2, 4].

У цій роботі послідовно (див. додаток), починаючи з квантовомеханічного рівняння та хвильових функцій, одержано точний інтегральний вираз для двочастинкової функції Гріна для випадку руху двох частинок, одна з яких заряджена, в електричному полі важкого ядра мішені

$$G_{pc}^+ = -\frac{1}{4\pi^3} \frac{m_n}{\hbar^2} \frac{1}{|\vec{r}_n - \vec{r}'_n| |\vec{r}_p - \vec{r}'_p|} \int_0^\infty e^{i\bar{k}_n |\vec{r}_n - \vec{r}'_n|} \left(\frac{\partial}{\partial \rho_2} - \frac{\partial}{\partial \rho_1} \right) (F_0(\rho_2) F_0(\rho_1)) k_p dk_p, \quad (1)$$

де

$$\bar{k}_n = \sqrt{\frac{2m_n}{\hbar^2} (E - E_p) + i0}, \quad \rho_{1,2} = \frac{k_p}{2} (r_p + r'_p \pm |\vec{r}_p - \vec{r}'_p|),$$

F_0 - регулярна кулонівська функція, а k_p - хвильове число "протона" (інші позначення наведено у додатку).

З метою побудови квазікласичного наближення функції Гріна (1) розглянемо функцію

$$D \equiv \left(\frac{\partial}{\partial \rho_2} - \frac{\partial}{\partial \rho_1} \right) (F_0(\rho_2) F_0(\rho_1)), \quad (2)$$

яка входить в підінтегральний вираз (1). За вибраних умов розв'язуваної задачі (великі значення Z_T , мала енергія E) характерними є великі значення параметра Зоммерфельда $\eta \gg 1$ ($\eta \equiv Z_p Z_T e^2 / 2k_p$), тому для кулонівських функцій у формулі (2) можна скористатися ВКБ-наближенням [5 - 7]

$$F_0(\rho) \approx [k(\rho)]^{-1/2} \sin[S(\rho) + \frac{\pi}{4}], \quad (3)$$

$$F_0'(\rho) \approx [k(\rho)]^{1/2} \cos[S(\rho) + \frac{\pi}{4}], \quad (4)$$

де $S(\rho)$ є дією для кулонівського поля

$$S(\rho) = \int_{2\eta}^{\rho} k(\rho) d\rho; \quad k(\rho) = \sqrt{1 - \frac{2\eta}{\rho}}; \quad \rho \geq 2\eta.$$

Наближення (3) та (4) у рівнянні (2) дає змогу одержати простий вираз для функції

$$D \approx \sin\{k(\bar{\rho})(\rho_1 - \rho_2)\}, \quad (5)$$

$$\bar{\rho} = \frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2) = \frac{\rho + \rho'}{2}; \quad \begin{cases} \rho = k_p r_p \\ \rho' = k_p r_p' \end{cases}; \quad \bar{\rho} \geq 2\eta.$$

З порівняння точного і ВКБ-розрахунків (рис. 1) функції $D_{12} \equiv D/(\rho_1 - \rho_2)$ для різних значень параметра Зоммерфельда ($\eta = 10, 15, 25$) залежно від величини $t = \rho_2 / 2\eta$ видно, що використане наближення дає досить точний результат навіть поблизу кулонівських точок повороту $t \leq 1$ при $(\rho_1 - \rho_2) / 2\eta \leq 0,3$.

Застосування наближення (5) для функції D дозволяє виконати інтегрування у виразі (1) по імпульсу "протона" k_p .

Так, підставляючи вираз (5) в інтеграл (1), одержимо

$$G_{pc}^+ \approx -\frac{1}{4\pi^3} \frac{m_n}{\hbar^2} \frac{1}{|\vec{r}_n - \vec{r}_n'|} \frac{1}{|\vec{r}_p - \vec{r}_p'|} \nu, \quad (6)$$

$$\nu = \int_A^{\infty} k_p \sin\{\sqrt{1 - (2\eta/\rho)} k_p |\vec{r}_p - \vec{r}_p'|\} \exp\{i\bar{k}_n |\vec{r}_n - \vec{r}_n'|\} dk_p,$$

де $A = 2\eta/(r_p + r_p')$. Так як $k_p \sqrt{1 - (2\eta/\bar{\rho})} = \sqrt{2m_p/\hbar^2} \sqrt{E_p - Z_p Z_T e^2 / ((1/2)(r_p + r_p'))}$, а $\bar{k}_n = \sqrt{2m_n/\hbar^2} \sqrt{E - E_p + i0}$, то заміна змінної

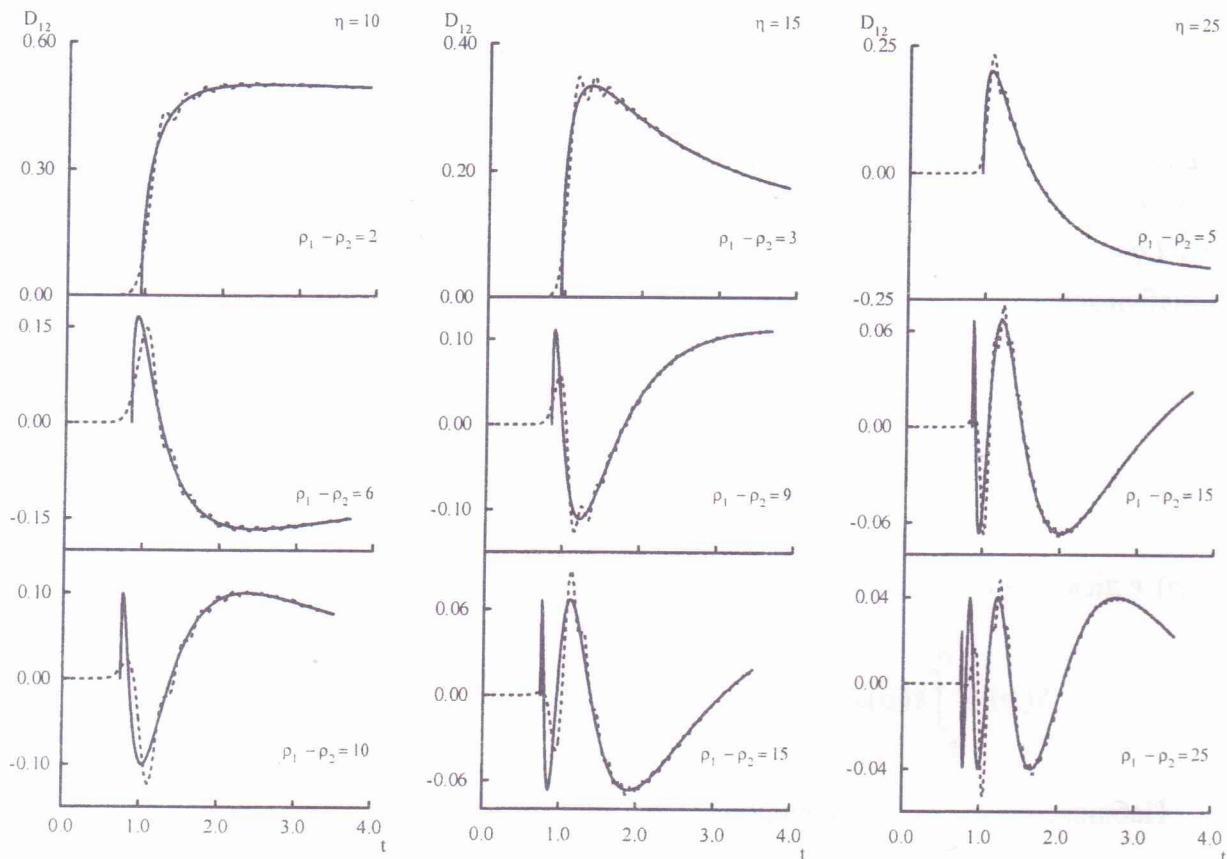


Рис. 1. Радіальні залежності точного (пунктир) та ВКБ (суцільна крива) представлень функції D_{12} для різних комбінацій параметрів.

$$q_p = \sqrt{k_p^2 - \frac{2m_p Z_p Z_T e^2}{\hbar^2} \frac{1}{(1/2)(r_p + r_p')}} = k_p \sqrt{1 - \frac{2\eta}{\bar{\rho}}}, \quad q_p \in [0, \infty), \quad q_p dq_p = k_p dk_p$$

дозволяє звести вираз (6) до інтеграла

$$v = \int_0^\infty q_p \sin q_p |\vec{r}_p - \vec{r}_p'| \exp\{i|\vec{r}_n - \vec{r}_n'\} \times$$

$$\times \sqrt{E - \frac{\hbar^2}{2m_p} [q_p^2 + \frac{2m_p Z_p Z_T e^2}{\hbar^2} \frac{1}{(1/2)(r_p + r_p')}] + i0} dq_p. \tag{7}$$

Виконуючи інтегрування у виразі (7) та підставляючи результат у формулу (6), одержимо аналітичний вираз для ВКБ-наближення функції Гріна двох незваємодіючих частинок у зовнішньому електричному полі

$$G_{pc}^+ \approx -\frac{i}{2\pi^2} \frac{(m_d \mu_d)^{3/2}}{\hbar^6} (\tilde{E})^2 \frac{H_2^{(1)}(\sqrt{x^2 + y^2})}{x^2 + y^2}, \tag{8}$$

$$\text{де } x^2 + y^2 = \lambda^2 = \frac{2\tilde{E}}{\hbar^2} \{m_d |\bar{R} - \bar{R}'|^2 + \mu_d |\bar{r} - \bar{r}'|^2\} = \frac{2\tilde{E}}{\hbar^2} \{m_p |\bar{r}_p - \bar{r}'_p|^2 + m_n |\bar{r}_n - \bar{r}'_n|^2\}, \quad H_2^{(1)}$$

функція Ханкеля [6]. Вираз (8) має точно такий самий вигляд як і у випадку функції Гріна для системи трьох незваємодіючих частинок [4], які мають енергію

$$\tilde{E} = E - \frac{Z_p Z_T e^2}{(1/2)(r_p + r_p')}$$

Одержаний відносно простий наближений вираз дає змогу досліджувати радіальну залежність функції Гріна.

Для зручності у виразі (8) виділимо явно дійсну та уявну частини

$$\text{Re} G_{pc}^+ = \frac{1}{2\pi^2} \frac{(m_d \mu)^{3/2}}{\hbar^6} \left\{ \tilde{E}^2 \begin{bmatrix} Y_2(\lambda) \\ \frac{2}{\pi} K_2(\lambda) \end{bmatrix} \right\} \frac{1}{\lambda^2} \begin{matrix} \tilde{E} \geq 0 \\ \tilde{E} \leq 0 \end{matrix},$$

$$\text{Im} G_{pc}^+ = -\frac{1}{2\pi^2} \frac{(m_d \mu)^{3/2}}{\hbar^6} \left\{ \tilde{E}^2 \begin{bmatrix} J_2(\lambda) \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \frac{1}{\lambda^2} \begin{matrix} \tilde{E} \geq 0 \\ \tilde{E} \leq 0 \end{matrix},$$
(9)

де J_2 і Y_2 - функції Бесселя першого та другого роду відповідно; K_2 - модифікована функція Бесселя [6].

Результати чисельних розрахунків $\text{Re} G_{pc}^+$ та $\text{Im} G_{pc}^+$ за формулами (9) наведено на рис. 2. З цього рисунка видно, що дійсна частина одержаної функції Гріна добре локалізована. Дійсно, легко показати, що $\text{Re} G_{pc}^+ \sim -(4/\pi)\lambda^{-4}$ при $\lambda \rightarrow 0$ і при зміні λ від 0,05 до 0,4 зменшується більше ніж на три порядки. Таким чином, бачимо, що ефективною у виразі (8) є область малих значень модулів векторів $|\bar{r}_p - \bar{r}'_p|$ та $|\bar{r}_n - \bar{r}'_n|$, що можливо при довільних величинах самих векторів \bar{r}_p та \bar{r}_n . На відміну від дійсної частини, уявна частина G_{pc}^+ (див. рис. 2) має суттєву нелокальність.

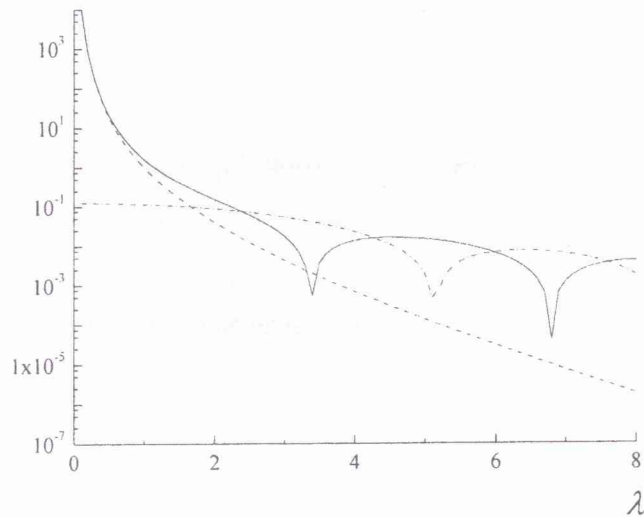


Рис. 2. Залежність $|\text{Re} G_{pc}^+|$ і $|\text{Im} G_{pc}^+|$ (штрих-пунктир) від λ . Суцільна крива – залежність $|\text{Re} G_{pc}^+|$ від λ при $\tilde{E} \geq 0$; штрих – при $\tilde{E} \leq 0$.

Висновки

Одержано досить простий квазікласичний аналітичний вираз для функції Гріна двох незваємодіючих частинок (одна з яких є зарядженою) у зовнішньому електричному полі. Досліджено радіальну залежність дійсної та уявної частин цієї функції. Одержана функція Гріна може бути використана для аналізу та розрахунків тричастинкових амплітуд реакцій

легких дейтроноподібних іонів (d , ${}^6\text{He}$, ${}^{11}\text{Li}$ тощо) з важкими ядрами мішеней за підбар'єрних енергій. Просторова локалізація $\text{Re}G_{pc}^+$ дає змогу використати потенціальний підхід у розрахунках дійсних частин амплітуд, а значна нелокальність $\text{Im}G_{pc}^+$ вказує на те, що відповідні розрахунки слід проводити на амплітудному рівні.

Додаток

Функція Гріна двох невзаємодіючих частинок у зовнішньому електричному полі

Рівняння, що описує рух двох невзаємодіючих частинок (одна з яких заряджена) у кулонівському полі має вигляд

$$(E - H)\Psi = \left\{ \frac{\hbar^2}{2m_n} \Delta_{\vec{r}_n} + \frac{\hbar^2}{2m_p} \Delta_{\vec{r}_p} - \frac{Z_p Z_T e^2}{r_p} + E \right\} \Psi = 0, \quad (1)$$

де E – кінетична енергія “дейтрона”; \vec{r}_p , \vec{r}_n – координати “протона” і “нейтрона” відповідно.

Розв'язком рівняння (1) є суперпозиція вільної “нейтронної” та кулонівської “протонної” $X_C^+(\vec{k}_p, \vec{r}_p)$ хвиль. Тому, користуючись загальним методом [2], можна одержати вираз для функції Гріна двох невзаємодіючих частинок у зовнішньому електричному полі

$$G_{pc}^+ \equiv G_{pc}^+(E; \vec{r}_p, \vec{r}_n; \vec{r}'_p, \vec{r}'_n) = \frac{1}{(2\pi)^6} \int \frac{d\vec{k}_p d\vec{k}_n}{E^+ - E_p - E_n} X_C^+(\vec{k}_p, \vec{r}_p) e^{i\vec{k}_n \vec{r}_n} X_C^{(+)*}(\vec{k}_p, \vec{r}'_p) e^{-i\vec{k}_n \vec{r}'_n}, \quad (2)$$

де \vec{k}_p , \vec{k}_n – хвильові вектори “протона” та “нейтрона”; $E_p = \hbar^2 k_p^2 / 2m_p$ – кінетична енергія “протона”; $E_n = \hbar^2 k_n^2 / 2m_n$ – кінетична енергія “нейтрона”.

У виразі (2) легко виконати інтегрування по координатах імпульсу “нейтрона” \vec{k}_n . Це інтегрування виділить під інтегралом (2) вільну функцію Гріна “нейтрона” [4]. Тоді

$$G_{pc}^+ = -\frac{1}{(2\pi)^4} \frac{1}{|\vec{r}_n - \vec{r}'_n|} \frac{m_n}{\hbar^2} \int d\vec{k}_p X_C^+(\vec{k}_p, \vec{r}_p) X_C^{(+)*}(\vec{k}_p, \vec{r}'_p) \exp(i\vec{k}_n |\vec{r}_n - \vec{r}'_n|). \quad (3)$$

Тепер виконаємо у виразі (3) інтегрування по кутовим змінним вектора \vec{k}_p . Для цього хвильові функції Кулона X_C^+ під інтегралом розкладемо по парціальних хвилях і просумуємо по кутових моментах однієї з частинок та по обох їх проекціях. У результаті одержимо

$$G_{pc}^+ = -\frac{1}{4\pi^3} \frac{m_n}{\hbar^2} \frac{1}{|\vec{r}_n - \vec{r}'_n|} \int_0^\infty e^{i\vec{k}_n |\vec{r}_n - \vec{r}'_n|} \sum_{l=0}^\infty (2l+1) \frac{F_l(k_p r_p)}{(k_p r_p)} \frac{F_l^*(k_p r'_p)}{(k_p r'_p)} P_l(\cos \theta) k_p^2 dk_p, \quad (4)$$

де $\cos \theta = (\vec{r}_p \cdot \vec{r}'_p) / r_p r'_p$, а $F_l(k_p r_p)$ – радіальні кулонівські хвильові функції для l -ї парціальної хвилі.

Ряд у формулі (4) можна просумувати. Для цього виразимо функції Кулона через функції Уітекера як

$$F_l(k_p r_p) = \frac{A}{\Gamma(2+2l)} M_{i\eta, l+1/2}(2ik_p r_p),$$

$$A = \frac{1}{2} |\Gamma(l+1+i\eta)| \exp\left\{-\frac{1}{2}\pi\eta - \frac{1}{2}\pi i(l+1)\right\},$$
(5)

$$F_l^*(k_p r'_p) = \frac{A^*}{\Gamma(2+2l)} M_{-i\eta, l+1/2}(-2ik_p r'_p),$$

$$A^* = \frac{1}{2} |\Gamma(l+1-i\eta)| \exp\left\{-\frac{1}{2}\pi\eta + \frac{1}{2}\pi i(l+1)\right\}$$

й отримаємо

$$S = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \frac{F_l(k_p r_p) F_l^*(k_p r'_p)}{(k_p r_p) (k_p r'_p)} P_l(\cos\theta) =$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2l+1)}{4 \exp(\pi\eta)} \frac{|\Gamma(l+1+i\eta)|}{k_p r_p \Gamma(2+2l)} M_{i\eta, l+1/2}(2ik_p r_p) \frac{|\Gamma(l+1-i\eta)|}{k_p r'_p \Gamma(2+2l)} M_{-i\eta, l+1/2}(-2ik_p r'_p) P_l(\cos\theta).$$
(6)

Виразимо добуток функцій Уітекера його інтегральним представленням [8]

$$\frac{1}{2k_p \sqrt{r_p r'_p}} \frac{|\Gamma(l+1+i\eta)|}{\Gamma(2+2l)} \frac{|\Gamma(l+1-i\eta)|}{\Gamma(2+2l)} M_{-i\eta, l+1/2}(-2ik_p r'_p) M_{i\eta, l+1/2}(2ik_p r_p) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-2i\eta x + ik_p (r_p + r'_p) \operatorname{th} x\right\} I_{2l+1} \left(\frac{2k_p \sqrt{r_p r'_p}}{\operatorname{ch} x} \right) \frac{dx}{\operatorname{ch} x}$$

і підставимо цей вираз у вираз (6)

$$S = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2 \exp(\pi\eta) k_p \sqrt{r_p r'_p}} P_l(\cos\theta) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-2i\eta x + ik_p (r_p + r'_p) \operatorname{th} x\right\} I_{2l+1} \left(\frac{2k_p \sqrt{r_p r'_p}}{\operatorname{ch} x} \right) \frac{dx}{\operatorname{ch} x}. \quad (7)$$

У виразі (7) можна знайти суму по кутовому моменту. Для цього скористаємося співвідношенням [8]

$$\sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\cos\theta) J_{2l+1} \left(\frac{i2k_p \sqrt{r_p r'_p}}{\operatorname{ch} x} \right) = \frac{ik_p \sqrt{r_p r'_p}}{\operatorname{ch} x} J_0 \left(\frac{i2k_p \sqrt{r_p r'_p}}{\operatorname{ch} x} \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} \right).$$

Тоді для виразу (7) можна записати

$$S = \frac{1}{2 \exp(\pi\eta)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} \exp\left\{-2i\eta x + ik_p (r_p + r'_p) \operatorname{th} x\right\} J_0 \left(\frac{i2k_p \sqrt{r_p r'_p}}{\operatorname{ch} x} \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} \right). \quad (8)$$

Вводячи змінні $\rho_{1,2}$ та використовуючи рекурентні співвідношення для функції Бесселя під інтегралом, остаточно одержимо

$$S = -\frac{\exp(-\pi\eta)}{4k_p |\vec{r}_p - \vec{r}'_p|} \left(\frac{\partial}{\partial \rho_2} - \frac{\partial}{\partial \rho_1} \right) \left[|\Gamma(1+i\eta)|^2 M_{-i\eta, 1/2}(-2i\rho_2) M_{-i\eta, 1/2}(-2i\rho_1) \right]. \quad (9)$$

Виразимо у формулі (9) функції Уітекера через функції Кулона [9]

$$S = \frac{1}{k_p |\vec{r}_p - \vec{r}'_p|} \left(\frac{\partial}{\partial \rho_2} - \frac{\partial}{\partial \rho_1} \right) [F_0(\eta, \rho_2) F_0(\eta, \rho_1)]. \quad (10)$$

Підставимо вираз (10) у вираз (4) й одержимо точне інтегральне представлення для функції Гріна двох невзаємодіючих частинок у кулонівському полі.

$$G_{pc}^+(E; \vec{r}_p, \vec{r}'_p; \vec{r}_n, \vec{r}'_n) = -\frac{1}{4\pi^3} \frac{m_n}{\hbar^2} \frac{1}{|\vec{r}_n - \vec{r}'_n| |\vec{r}_p - \vec{r}'_p|} \times \int_0^\infty \exp(i\vec{k}_n |\vec{r}_n - \vec{r}'_n|) \left(\frac{\partial}{\partial \rho_2} - \frac{\partial}{\partial \rho_1} \right) [F_0(\rho_2) F_0(\rho_1)] k_p dk_p. \quad (11)$$

Формула (11) є не що інше як інтеграл по енергії від суперпозиції вільної “нейтронної” та кулонівської “протонної” [10] одночастинкових функцій Гріна, що очевидно узгоджується із загальним методом [2, 4] побудови таких багаточастинкових функцій.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Фаддеев Л. Д. Теория рассеяния для системы из трех частиц // ЖЭТФ. - 1960. - Т. 39, вып. 5. - С. 1459 - 1467.
2. Базь А. И., Зельдович Я. Б., Переломов А. М. Рассеяние реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике // М.: Наука, 1972. - 544 с.
3. Вербицкий В. П., Теренецкий К. О. Учет поляризуемости и развала дейтронов при описании их упругого рассеяния тяжелыми ядрами // Изв. АН СССР. Сер. физ. - 1985. - Т. 49, № 5. - С. 1423 - 1429.
4. Ситенко А. Г. Теория рассеяния - К.: Вища шк., 1975. - 256 с.
5. Альдер К., Бор О., Хус Т. и др. Изучение структуры ядра при кулоновском возбуждении ионами // Деформация атомных ядер / Пер. с англ. - М., 1958. - 383 с.
6. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Пер. с англ. - М.: Наука, 1979. - 832 с.
7. Фреман Н., Фреман П. У. ВКБ-приближение / Пер. с англ. - М.: Мир, 1967. - 168 с.
8. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. - М.: Наука, 1981. - 798 с.
9. Слейтер Люси Дж. Вырожденные гипергеометрические функции / Пер. с англ. - М.: ВЦ АН СССР, 1966. - 251 с.
10. Hostler L., Pratt R. H. Coulomb Green's function in closed form // Phys. Rev. Let. - 1963. - Vol. 10, No. 11. - P. 469 - 470.

ВКБ-ПРИБЛИЖЕНИЕ ДЛЯ ФУНКЦИИ ГРИНА ДВУХ НЕВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ЧАСТИЦ ВО ВНЕШНЕМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

В. П. Вербицкий, Л. А. Жукалюк, К. О. Теренецкий

Получено квазиклассическое (ВКБ) выражение для функции Грина двух частиц, которые не взаимодействуют между собой, во внешнем электрическом поле. Исследована радиальная зависимость полученного выражения. Показана существенная пространственная локализация вещественной части этой функции.

**WKB-APPROXIMATION FOR GREEN'S FUNCTION OF TWO NON-INTERACTING
PARTICLES IN THE EXTERNAL ELECTRICAL FIELD****V. P. Verbytsky, L. Ya. Zhukalyuk, K. O. Terenetsky**

The quasiclassical (WKB) expression for Green's function of two non-interacting particles in the external electrical field has been obtained and its radial dependence has been investigated. The essential spatial localization of the real part of this function has been shown.

Надійшла до редакції 10.10.03,
після доопрацювання – 18.12.03.