

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ СГУСТКОВ ПУЧКОВ ВЧ-УСКОРИТЕЛЕЙ

М. Э. Долинская, Н. Л. Дорошко, А. К. Зайченко

Институт ядерных исследований НАН Украины, Киев

Получены простые аналитические выражения для потенциала и напряженности электрического поля сгустков ускоряемых частиц сферической формы с параболическим и эллипсоидальной формы с однородным и параболическим распределениями заряда. Проведены расчеты этих величин при конкретных значениях параметров сгустков, характерных для ВЧ-ускорителей. Полученные распределения напряженности электрического поля сгустков с параболическим распределением заряда близки к реальным.

Введение

Пучки высокочастотных ускорителей представляют собой последовательность сгустков (банчей), протяженность которых соответствует времени пролета порядка нескольких наносекунд [1]. Для оптимизации ускорения и транспортировки таких пучков нужно определять параметры сгустков в режиме реального времени с учетом влияния пространственного заряда сгустков и захвата ими части электронов, образующихся в результате ионизации пучком остаточного газа в вакуумной камере ускорителя. Для учета этих эффектов нужно знать распределения потенциала и напряженности электрического поля сгустков. При определении этих распределений обычно предполагается, что сгустки имеют форму сферы с равномерным распределением заряда [2]. В настоящей работе исследованы распределения потенциала и напряженности электрического поля сферических сгустков с параболическим и эллипсоидальных сгустков с однородным и параболическим распределениями заряда.

1. Распределение электрического заряда в сгустках

Потенциал электрического поля сгустка $\phi(\vec{r})$ определяется решением уравнения Пуассона

$$\Delta\phi(\vec{r}) = -\rho(\vec{r}) / \varepsilon_0, \quad (1)$$

а напряженность $E(\vec{r})$ – соотношением

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \phi(\vec{r}), \quad (2)$$

где $\rho(\vec{r})$ – распределение плотности электрического заряда в сгустках, а ε_0 – диэлектрическая постоянная. Из формул (1) и (2) следует, что для определения потенциала и напряженности электрического поля сгустка нужно знать распределение плотности электрического заряда в сгустке $\rho(\vec{r})$.

Распределение электрического заряда в сферических сгустках. Поперечные размеры сгустков практически одинаковы, поэтому при проведении предварительных диагностических оценок форму сгустка обычно представляют в виде сферы с однородным распределением заряда. В этом случае плотность заряда в сгустке определяется как

$$\rho_{sh} = \frac{3NZe}{4\pi R^3}, \quad (3)$$

где N - число частиц в сгустке; Z – кратность обдирки иона; e – заряд протона; R – радиус сгустка.

Более реальным представляется параболическое распределение заряда в сферическом сгустке. Оно описывается функцией Ватерберга [2]

$$\rho_{sp}(r) = \frac{15NZe}{8\pi R^3} \cdot \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right), \quad (4)$$

где $r \in [0, R]$ – радиальная координата.

Распределение электрического заряда в эллипсоидальных сгустках. В реальных условиях продольный размер сгустка не совпадает с его поперечными размерами и форму сгустка целесообразнее представлять вытянутым эллипсоидом вращения. Плотность заряда в таком сгустке при его однородном распределении описывается выражением

$$\rho_{eh} = \frac{3NZe}{4\pi a^2 c}, \quad (5)$$

где a и c – поперечная и продольная полуоси эллипсоида соответственно. Для эллипсоида вращения с параболическим распределением заряда введем поперечную пространственную координату $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, где x и y – поперечные прямоугольные координаты. Тогда распределение плотности заряда можно представить как

$$\rho_{ep}(r, z) = \frac{15NZe}{8\pi ab} \left(1 - \frac{r^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2}\right), \quad (6)$$

где z – продольная декартова координата. На границе эллипсоида координаты r и z должны удовлетворять соотношению

$$\frac{r^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (7)$$

которое при решении уравнения Пуассона необходимо учитывать в качестве граничного условия на поверхности эллипсоида.

2. Расчет потенциала электрического поля сгустка

Потенциал электрического поля сферического сгустка. Решение уравнения Пуассона для сферического сгустка с однородным распределением заряда приводит к потенциалу

$$\phi_{sh}(r) = \begin{cases} \frac{NZe}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{3}{2R} - \frac{r^2}{2R^3}\right), & r \leq R, \\ \frac{NZe}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r}, & r > R, \end{cases} \quad (8)$$

а для сферического сгустка с параболическим распределением заряда – к потенциалу

$$\phi_{sp}(r) = \begin{cases} \frac{NZe}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{15}{8R} - \frac{5r^2}{4R^3} + \frac{3r^4}{8R^5} \right), & r \leq R, \\ \frac{NZe}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r}, & r > R. \end{cases} \quad (9)$$

В качестве примера на рис. 1 приведены графики зависимости потенциалов от координаты r для обоих случаев при $N = 10^9$, $Z = 4$, $R = 10$ мм. Из рисунка видно, что потенциал в сгустке с параболическим распределением заряда больше потенциала в сгустке с однородным распределением заряда.

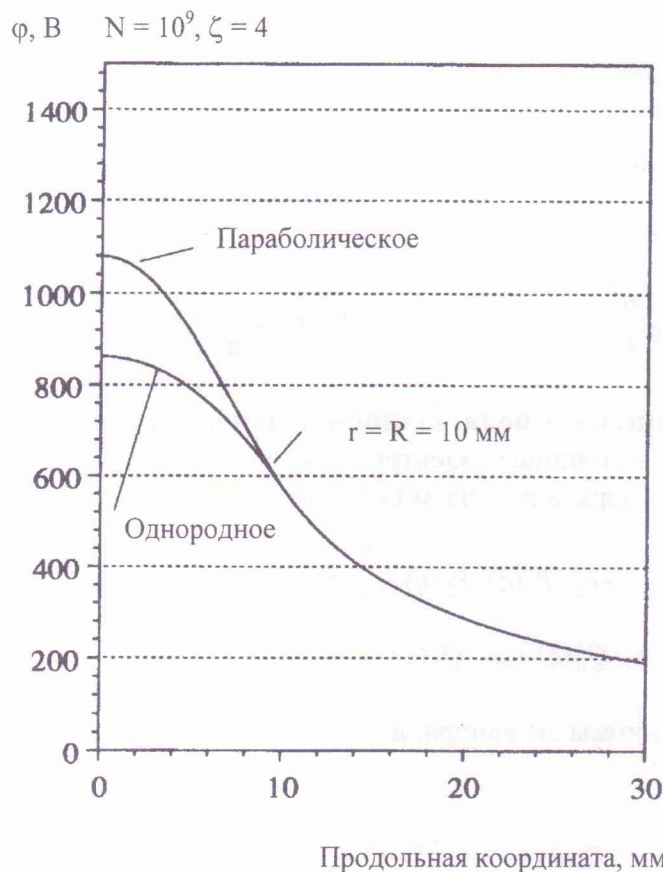


Рис. 1. Зависимость потенциала сгустка сферической формы с однородным и параболическим распределениями заряда от продольной координаты.

Потенциал электрического поля эллипсоидального сгустка. Для определения потенциала электрического поля эллипсоидального сгустка введем вытянутые сферические координаты ξ, η, φ , связанные с декартовыми координатами точки x, y, z соотношениями [3]

$$\begin{aligned} x &= d[(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)]^{1/2} \cos \varphi, \\ y &= d[(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)]^{1/2} \sin \varphi, \\ z &= d\xi\eta, \\ \xi &\in [1, \infty), \quad \eta \in [-1, 1], \quad \varphi \in [0, 2\pi). \end{aligned} \quad (10)$$

В этих координатах

$$r = d\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)}, \quad (11)$$

где

$$d = \sqrt{c^2 - a^2},$$

оператор Лапласа принимает вид

$$\Delta\phi(\xi, \eta) = \frac{1}{c^2(\xi^2 - \eta^2)} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (\xi^2 - 1) \frac{\partial \phi(\xi, \eta)}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} (1 - \eta^2) \frac{\partial \phi(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right], \quad (12)$$

а выражение для плотности ионов (5) преобразуется в выражение

$$\rho_{ep}(\xi, \eta) = s1 + s2 \cdot (\xi^2 + \eta^2) + s3 \cdot \xi^2 \cdot \eta^2, \quad (14)$$

где

$$s1 = \rho_{0ep} \frac{a^2}{b^2}, \quad s2 = -\rho_{0ep} \frac{c^2}{b^2}, \quad s3 = \rho_{0ep} \frac{c^4}{a^2 \cdot b^2}. \quad (15)$$

Потенциал электрического поля эллипсоидального сгустка с однородным распределением заряда. Для потенциала электрического поля эллипсоидального сгустка с однородным распределением заряда получаем выражение

$$\phi_{eh}(\xi, \eta) = \begin{cases} c_0 + c_2 \cdot P_2(\xi) \cdot P_2(\eta) - \frac{2}{3} \cdot \sigma \cdot (\xi^2 + \eta^2), & \xi \in [1, \xi_0] \\ a_0 \cdot Q_0(\xi) + a_2 \cdot Q_2(\xi) \cdot P_2(\eta), & \xi > \xi_0, \end{cases} \quad (16)$$

где $P_n(x)$ – стандартные полиномы Лежандра, а полиномы $Q_n(x)$ определяются рекуррентной формулой [3]

$$Q_{n+1}(x) = \frac{1}{n+1} [(2n+1)xQ_n(x) - nQ_{n-1}(x)] \quad (17)$$

с начальными значениями

$$Q_0(x) = \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \quad \text{и} \quad Q_1(x) = \frac{x}{2} \cdot \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - 1.$$

Коэффициенты, входящие в выражения (16), определяются соотношениями

$$\begin{aligned} a_0 &= -\sigma P_2'(\xi_0) / Q_0'(\xi_0), \\ a_2 &= \sigma P_2'(\xi_0) / [P_2(\xi_0) Q_2'(\xi_0) - P_2'(\xi_0) Q_2(\xi_0)], \\ c_0 &= \sigma [P_2(\xi_0) Q_0'(\xi_0) - P_2'(\xi_0) Q_0(\xi_0)] / Q_0'(\xi_0), \\ c_2 &= \sigma Q_2'(\xi_0) / [P_2(\xi_0) Q_2'(\xi_0) - P_2'(\xi_0) Q_2(\xi_0)], \end{aligned} \quad (18)$$

где $\sigma = \rho_{eh} \cdot c^2 / 9\varepsilon_0$, $\xi_0 = a/d$ – фокус эллипса, а штрих обозначает дифференцирование по ξ .

Потенциал электрического поля эллипсоидального ступка с параболическим распределением заряда. С учетом введенных ранее выражений для плотностей распределения заряда решение уравнения Пуассона представим в виде

$$\phi_p(\xi, \eta) = A \cdot (\xi^2 + \eta^2) + B \cdot (\xi^4 + \eta^4) + C \cdot \xi^4 \cdot \eta^4, \quad (19)$$

где коэффициенты A , B и C определяются соотношениями

$$A = -\frac{c^2}{\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{s1}{6} + \frac{s2}{10} \right), \quad B = -\frac{c^2}{\varepsilon_0} \cdot \frac{s2}{20}, \quad C = -\frac{c^2}{\varepsilon_0} \cdot \frac{s3}{12}. \quad (20)$$

Учитывая граничные условия на поверхности эллипсоида (равенство внутреннего и наружного потенциалов и их производных в точке $\xi = \xi_0$ для всех η из области определения), для потенциала электрического поля эллипсоидального ступка с параболическим распределением заряда получим следующее выражение:

$$\phi_{ep}(\xi, \eta) = \begin{cases} \phi_p(\xi, \eta) + C_0 + C_2 \cdot P_2(\xi) \cdot P_2(\eta) + C_4 \cdot P_4(\xi) \cdot P_4(\eta), & \xi \in [1, \xi_0] \\ A_0 \cdot Q_0(\xi) + A_2 \cdot Q_2(\xi) \cdot P_2(\eta) + A_4 \cdot Q_4(\xi) \cdot P_4(\eta), & \xi > \xi_0. \end{cases} \quad (21)$$

Неизвестные коэффициенты в (21) определяются из граничных условий. Вначале удобнее определить значения A_4 и C_4 , затем A_2 и C_2 и A_0 и C_0 :

$$A_4 = \frac{8}{35} \cdot (P_4'(\xi_0) \cdot (B + C \cdot \xi_0^4) - 4 \cdot C \cdot \xi_0^3 \cdot P_4(\xi_0)) / (Q_4(\xi_0) \cdot P_4'(\xi_0) - Q_4'(\xi_0) \cdot P_4(\xi_0)),$$

$$C_4 = (A_4 \cdot Q_4'(\xi_0) - \frac{32}{35} \cdot C \cdot \xi_0^3) / P_4'(\xi_0),$$

$$A_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{P_2'(\xi_0) \cdot \left(A + \frac{15}{4} \cdot (A_4 \cdot Q_4(\xi_0) - C_2 \cdot P_2(\xi_0)) \right) - P_2(\xi_0) \cdot \frac{15}{4} \cdot CS}{Q_2(\xi_0) \cdot P_2'(\xi_0) - Q_2'(\xi_0) \cdot P_2(\xi_0)},$$

$$C_2 = (A_2 \cdot Q_2'(\xi_0) - \frac{5}{2} \cdot CS) / P_2'(\xi_0), \quad CS = A_4 \cdot Q_4'(\xi_0) - C_4 \cdot P_4'(\xi_0),$$

$$A_0 = (2A \cdot \xi_0 + 4B \cdot \xi_0^3 + \frac{1}{2} \cdot (A_2 \cdot Q_2(\xi_0) - C_2 \cdot P_2(\xi_0)) - \frac{3}{8} \cdot CS) / Q_0(\xi_0),$$

$$C_0 = A_0 \cdot Q_0(\xi_0) - A \cdot \xi_0^2 - B \cdot \xi_0^4 - \frac{1}{2} \cdot (A_2 \cdot Q_2(\xi_0) - C_2 \cdot P_2(\xi_0)) + \frac{3}{8} \cdot CS.$$

На рис. 2 представлены графики зависимости потенциала эллипсоида с однородным и параболическим распределением заряда от продольной координаты, а на рис. 3 – от поперечной координаты в центре эллипсоида ($\eta = 0$) и в фокусной точке ($\eta = 1$) при $N = 10^9$, $Z = 4$, $b = 10$ мм и $a = 50$ мм.

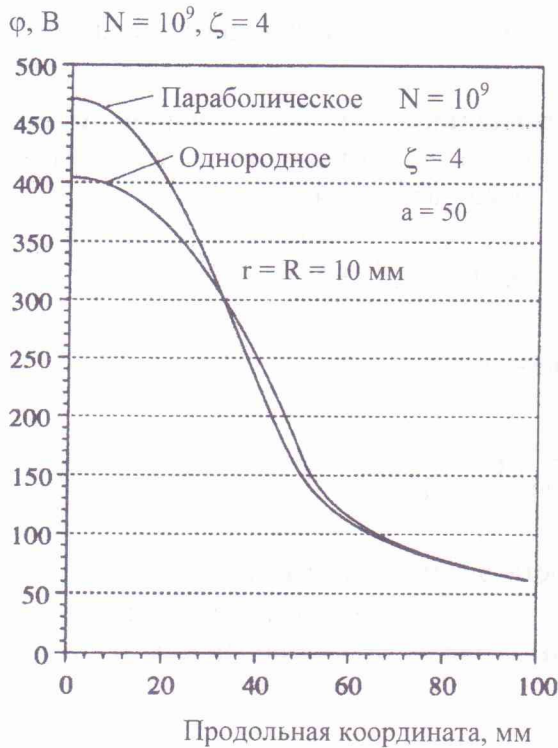


Рис. 2. Зависимость потенциала сгустка эллипсоидальной формы с однородным и параболическим распределениями заряда от продольной координаты.

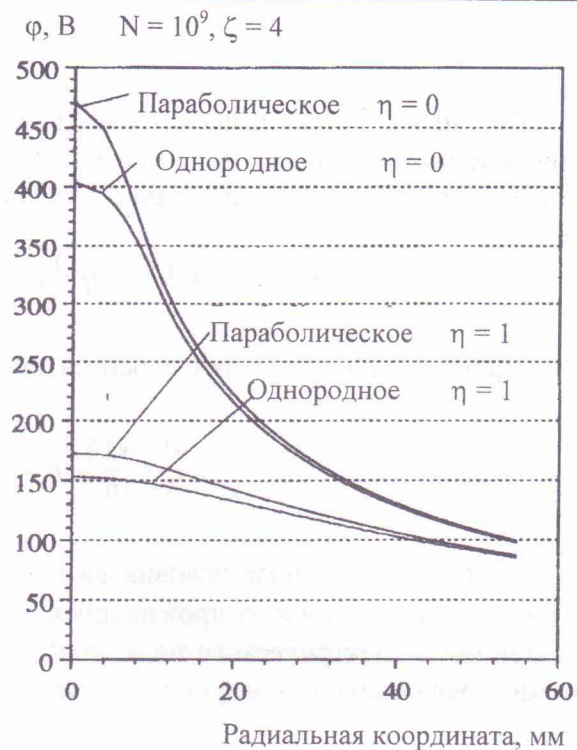


Рис. 3. Зависимость потенциала сгустка эллипсоидальной формы с однородным и параболическим распределениями заряда от радиальной координаты (при η = 0 и η = 1).

2. Расчет напряженности электрического поля сгустка

Напряженность электрического поля сферического сгустка с однородным распределением заряда. Радиальная компонента напряженности электрического поля сферического сгустка с однородным распределением заряда определится выражением

$$E^r_{hs}(r) = \begin{cases} \frac{NZe}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{r}{R^3}, & r \leq R, \\ \frac{NZe}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2}, & r > R. \end{cases} \quad (22)$$

Напряженность электрического поля сферического сгустка с параболическим распределением заряда. Из (16) для радиальной компоненты напряженности электрического поля сферического сгустка с параболическим распределением заряда получается выражение

$$E^r_{ps}(r) = \begin{cases} \frac{NZe}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{5}{2} \cdot \frac{r}{R^3} - \frac{3}{2} \cdot \frac{r^3}{R^5} \right), & r \leq R, \\ \frac{NZe}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2}, & r > R. \end{cases} \quad (23)$$

На рис. 4 представлены графики зависимости напряженности электрического поля сферического сгустка с однородным и параболическим распределениями заряда от радиальной координаты r . Из них видно, что максимальные значения напряженности электрического поля для рассмотренных случаев, как и следовало ожидать, соответствуют различным значениям r , что является следствием движения частиц в фазовом пространстве.

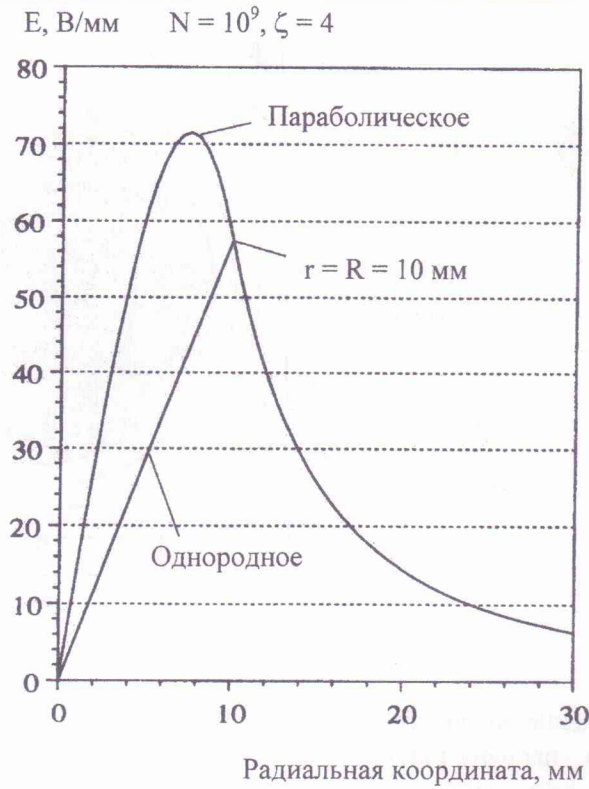


Рис. 4. Зависимость напряженности электрического поля стержня сферической формы с однородным и параболическим распределениями заряда от радиальной координаты.

Такое поведение напряженности хорошо согласуется с поведением потенциалов. Так, максимальное значение потенциала сферического стержня при параболическом распределении заряда достигается в точке $r = (\sqrt{5}/3)R$, а при однородном распределении – в точке $r = R$. Положение первого максимума, в отличие от положения второго, соответствует наблюдаемому на практике [4] уменьшению напряженности электрического поля внутри пучка.

Напряженность электрического поля эллипсоидального стержня с однородным распределением заряда. В эллиптической системе координат (ξ, η) оператор $\vec{\nabla}$ имеет вид

$$\left| \vec{\nabla} \phi(\xi, \eta) \right| = \frac{1}{c \sqrt{\xi^2 - \eta^2}} \sqrt{(\xi^2 - 1) \left[\frac{\partial \phi(\xi, \eta)}{\partial \xi} \right]^2 + (1 - \eta^2) \left[\frac{\partial \phi(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right]^2}. \quad (24)$$

С учетом (24) для напряженности электрического поля эллипсоидального стержня с однородным распределением заряда получаем выражение

$$|E_{he}(\xi, \eta)| = \begin{cases} \frac{3}{c \sqrt{\xi^2 - \eta^2}} \left[\xi^2 (\xi^2 - 1) (c_2 P_2(\eta) - \sigma)^2 + \eta^2 (1 - \eta^2) (c_2 P_2(\xi) - \sigma)^2 \right]^{1/2} \\ \frac{1}{c \sqrt{\xi^2 - \eta^2}} \left[(\xi^2 - 1) (a_0 Q_0'(\xi) + a_2 Q_2'(\xi) P_2(\eta))^2 + 9 \eta^2 (1 - \eta^2) a_2^2 Q_2(\xi)^2 \right]^{1/2}. \end{cases} \quad (25)$$

На рис. 5 представлено трехмерное изображение распределения абсолютных значений напряженности электрического поля эллипсоидального стержня с однородным распределением заряда в радиальном направлении при $z = 0$, что соответствует $\eta = 0$. На рис. 6 это же распределение представлено в виде контурных линий, где более темный цвет соответствует меньшему значению поля. Очевидно, что, как и в случае сферического стержня,

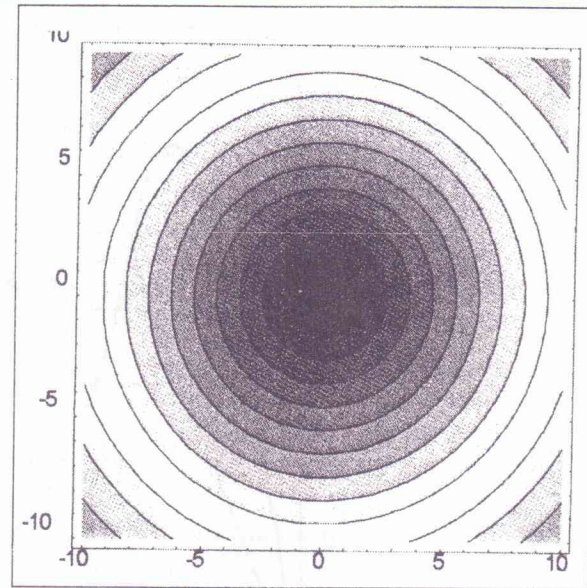
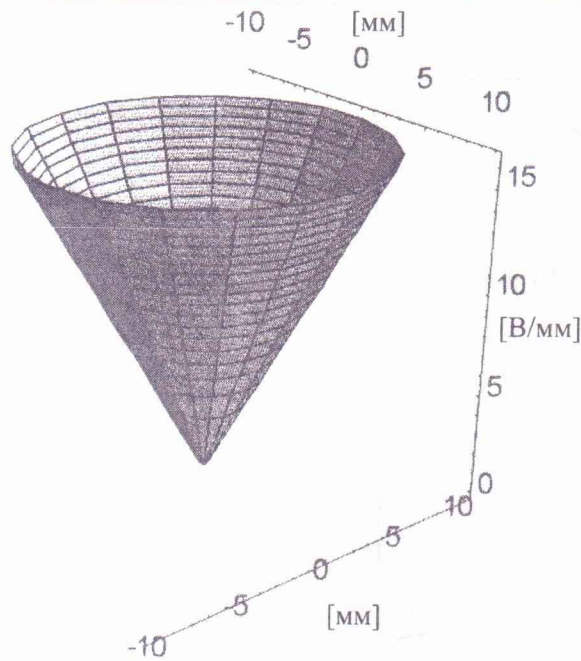


Рис. 5. Трехмерное представление распределения абсолютного значения напряженности электрического поля внутри однородно заряженного стержня эллипсоидальной формы при $\eta = 0$.

Рис. 6. Контурное представление напряженности электрического поля внутри однородно заряженного стержня эллипсоидальной формы при $\eta = 0$.

максимальное значение напряженности электрического поля эллипсоидального стержня с однородным распределением заряда достигается на границе пучка.

Напряженность электрического поля эллипсоидального стержня с параболическим распределением заряда. Для напряженности электрического поля эллипсоидального стержня с параболическим распределением заряда с учетом (24) получается выражение

$$|E_{pe}(\xi, \eta)| = \begin{cases} \frac{1}{c\sqrt{\xi^2 - \eta^2}} \left((\xi^2 - 1)DK(\xi, \eta)^2 + (1 - \eta^2)DN(\xi, \eta)^2 \right)^{1/2} \\ \frac{1}{c\sqrt{\xi^2 - \eta^2}} \left((\xi^2 - 1)DKQ(\xi, \eta)^2 + (1 - \eta^2)DNQ(\xi, \eta)^2 \right)^{1/2} \end{cases}, \quad (26)$$

где

$$DK(\xi, \eta) = 2A\xi + 4B\xi^3 + 4C\xi^3\eta^4 + C2 \cdot P_2'(\xi)P_2(\eta) + C4 \cdot P_4'(\xi)P_4(\eta),$$

$$DN(\xi, \eta) = 2A\eta + 4B\eta^3 + 4C\xi^4\eta^3 + C2 \cdot P_2(\xi)P_2'(\eta) + C4 \cdot P_4(\xi)P_4'(\eta),$$

$$DKQ(\xi, \eta) = A0 \cdot Q_0(\xi) + A2 \cdot Q_2(\xi) \cdot P_2(\eta) + A4 \cdot Q_4(\xi) \cdot P_4(\eta),$$

$$DNQ(\xi, \eta) = A2 \cdot Q_2(\xi) \cdot P_2'(\eta) + A4 \cdot Q_4(\xi) \cdot P_4'(\eta).$$

На рис. 7 представлено трехмерное изображение распределения абсолютных значений напряженности электрического поля в эллипсоидальном стержне с параболическим распределением заряда при $\eta = 0, \eta = 0,5, \eta = 0,75$ (сверху вниз). Контурное представление

напряженности при $\eta = 0$ изображено на рис. 8. Из рисунков видно, что, как и в случае сферических сгустков, положения максимумов напряженности электрического поля в эллипсоидальном сгустке с однородным и параболическим распределениями заряда не совпадают.

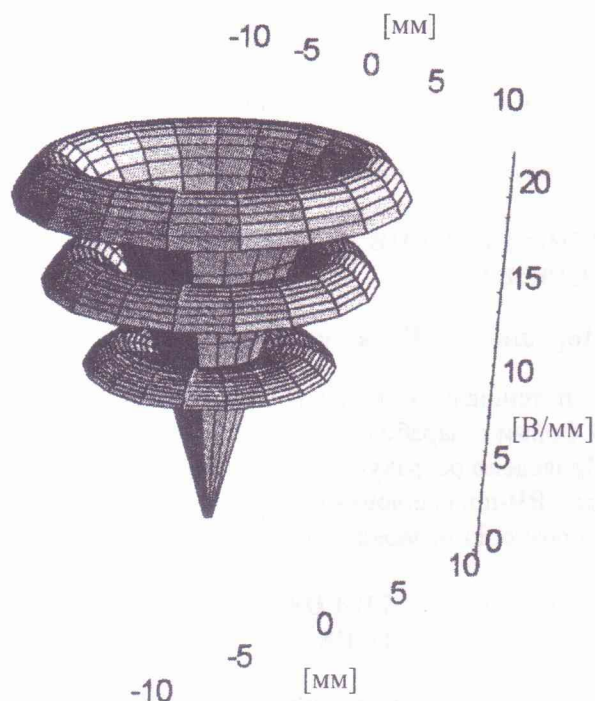


Рис. 7. Трехмерное представление распределения абсолютного значения напряженности электрического поля внутри сгустка эллипсоидальной формы с параболическим распределением заряда для $\eta = 0$ (верхняя часть изображения), $\eta = 0,5$ (средняя часть изображения), $\eta = 0,75$ (нижняя часть изображения).

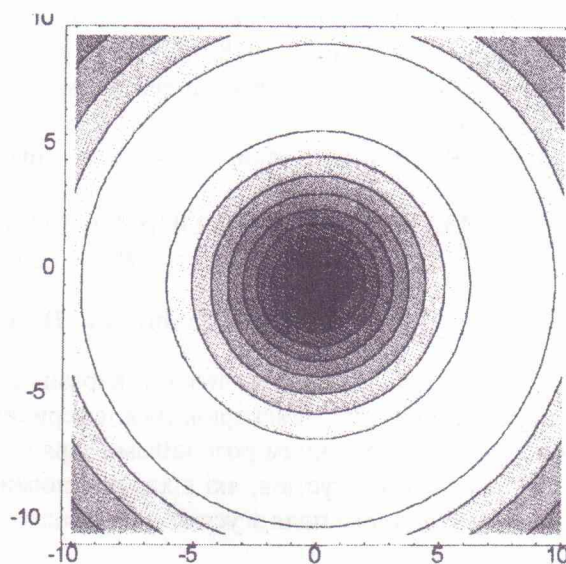


Рис. 8. Контурное представление напряженности электрического поля внутри сгустка эллипсоидальной формы с параболическим распределением заряда при $\eta = 0$.

Заключение

В работе получены простые аналитические выражения для потенциала и напряженности электрического поля сгустков ускоряемых частиц сферической формы с параболическим и сгустков эллипсоидальной формы с однородным и параболическим распределениями заряда. На основе полученных выражений рассчитаны распределения потенциала и напряженности электрического поля сгустков с параметрами, характерными для ускорителей типа UNILAC GSI (Дармштадт, Германия). Эти распределения представлены на рис. 1 – 8. Сопоставление этих результатов с экспериментальными данными свидетельствует о том, что распределение заряда в сгустках близко к параболическому. Аналогичные расчеты можно проводить и для других ВЧ-ускорителей, например для У-240 (ИЯИ НАН Украины, Киев).

Используя полученные в работе выражения, можно оценить пространственный заряд сгустков и вероятность захвата ими электронов, образующихся из-за ионизации пучком остаточного газа в вакуумной камере ускорителя, что позволит повысить точность диагностики пучков ускоряемых частиц.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Strehl P.* The most important parameters of particle beams // *Kerntechnik.* – 1991. – Vol. 56, No. 4. – P. 208 – 213.
2. *Struckmeier J., Klabunde J., Reiser M.* On the stability and emittance growth of different particle phase-space distributions in a long magnetic quadrupole channel // *Particle Accelerators.* – 1984. – Vol. 15. – P. 47 – 65.
3. *Комаров И.В., Пономарев Л.И., Славянов С.Ю.* Сфероидальные и кулоновские сфероидальные функции. – М.: Наука, 1978. – С. 15.
4. *Strehl P.* Beam instrumentation and diagnostics // *Joint Universities Accelerator School.* – Archamps, 1999. – P. 161.
5. *Брук Г.* Циклические ускорители заряженных частиц. – М.: Атомиздат, 1970.

**МАТЕМАТИЧНИЙ ОПИС ЕЛЕКТРИЧНИХ ПОЛІВ ЗГУСТКІВ ПУЧКІВ
ВЧ-ПРИСКОРЮВАЧІВ**

М. Е. Долінська, Н. Л. Дорошко, О. К. Зайченко

Отримано прості аналітичні вирази для потенціалу й напруженості електричного поля згустків частинок, що прискорюються, сферичної форми з параболічним та еліпсоїдальної форми з однорідним і параболічним розподілами заряду. Проведено розрахунки цих величин для конкретних значень параметрів згустків, які є характерними для ВЧ-прискорювачів. Отримані розподіли напруженості електричного поля згустків з параболічним розподілом заряду близькі до реальних.

**MATHEMATICAL DESCRIPTION OF THE ELECTRICAL FIELDS FOR THE BUNCHING
BEAMS AT THE RF-ACCELERATORS**

M. E. Dolinska, N. L. Doroshko, O. K. Zaichenko

The simple analytical expressions for the potential and electrical field strength for the accelerating particle bunches with such configurations as: spherical bunches with parabolic density ions distributions and elliptical bunches with homogeneous and parabolic density ions distributions are obtained. The values of these parameters are calculated for the typical bunches of the accelerators. The calculated electrical field strengths for the bunches with parabolic density ions distributions are closed to the real values.

Поступила в редакцію 25.02.02,
после доработки – 12.09.02.