УДК 519.85

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ДВУХ АЛГОРИТМОВ РЕКОНСТРУКЦИИ ИЗОБРАЖЕНИЯ ПО ПРОЕКЦИЯМ В КОМПЬЮТЕРНОЙ ТОМОГРАФИИ

А. М. Соколов

Рассматриваются два алгоритма восстановления изображения по проекциям в компьютерной томографии - сверточный алгоритм и метод регуляризации. Оба алгоритма реализованы и выполнена их сравнительная оценка с учетом их устойчивости, выбора управляющих параметров и применяемых вычислительных методов.

Настоящая работа была выполнена в связи с разработкой и началом производства в Украине отечественного однофотонного эмиссионного компьютерного томографа - современного диагностического прибора для анализа биохимических процессов в человеческом организме. Томограф регистрирует радиоактивное излучение от принятых пациентом внутрь радиофармпрепаратов и накапливает серию плоских изображений - проекций. Важным и математически содержательным элементом томографического исследования является процедура реконструкции пространственного изображения изучаемого объекта, в нашем случае - распределение радиоактивного препарата внутри тела пациента по плоским проекциям.

Цель работы - реализовать два алгоритма реконструкции и провести их сравнительный анализ. Математическая постановка задачи реконструкции изображения состоит в следующем. Для отдельного слоя объекта, расположенного в области Ω и определяемого своей плотностью (''изображением'') $f(x,y)$, задается набор проекций $p(l,\theta)$ для дискретного набора значений параметров l,θ. Функции $f(x,y)$ и $p(l,\theta)$ связаны преобразованием Радона

$$Tf \equiv \int\limits_{z\cdot w=l} f(x,y)dz = p(l,\theta), \tag{1}$$

где $z\cdot w=l$ - уравнение прямой в R^2 ($w=(\cos\theta,\sin\theta)$, $z=(x,y)$), $l\in(-\infty,\infty)$, $\theta\in[0,\pi]$. Прямая, вдоль которой идет проектирование, для заданных значений параметров l и θ в плоскости изучаемого слоя приведена на рис.1. По заданным проекциям $p(l,\theta)$ требуется реконструировать изображение $f(x,y)$. Иначе говоря, требуется выполнить обратное преобразование Радона

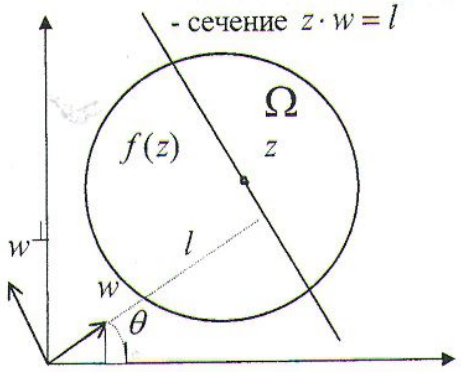


Рис. 1

$$f(x,y) = T^{-1}[p(l,\theta)]. \tag{2}$$

Приведенная постановка задачи соответствует параллельной схеме сканирования и в ней для упрощения не учитывается поглощение излучения внутри изучаемой области.

Для реализации и дальнейшего сравнения были выбраны два алгоритма реконструкции изображения: обратного проектирования с фильтрацией ("сверточный" алгоритм) [1] и метод регуляризации [2 - 3].

Сверточный алгоритм (СА) основан на

следующем представлении обратного оператора Радона:

$$T^{-1} = -\frac{1}{2\pi}\ BHD\ , \tag{3}$$

где $D\ \ p(l,\theta) = \lim\limits_{\Delta l \to 0} \dfrac{p(l+\Delta l,\theta) - p(l,\theta)}{\Delta l}$ - оператор дифференцирования по 1-й переменной,

$H\ \ z(l',\theta) = -\dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{z(l,\theta)}{l'-l}dl$ - оператор Гильберта, B - оператор обратного проецирования

$B\ \ t(r,\varphi) = \int\limits_0^{\pi} t(r\cos(\theta-\varphi),\theta)d\theta$.

В сверточном алгоритме действие первых двух операторов заменяется оператором свертки. При этом используется представление $H\ \ z = \lim\limits_{A\to\infty} z\ * \rho_A$, где семейство ρ_A определяют, задав функцию «окна» F_A с шириной полосы пропускания А («окно» Хэмминга и др). Вычисление решения (2) ведется по формуле

$$f = B(p*_1\ q)\,,\ \text{где}\ q(u) = -\frac{1}{2\pi}\rho'_A(u)\,.$$

Таким образом в реконструкции выделяются два этапа.

1. Свертка по первой переменной. Функцию ядра на первом этапе выбирают на основе F_A - одной из функций, принадлежащих семейству функций "окна".

2. Обратное проецирование.

В методе регуляризации (МР) вместо основного уравнения компьютерной томографии

$$Tf \equiv \int\limits_{z\cdot w = l} f(x,y)dz = p(l,\theta) \tag{4}$$

решают задачу на минимум регуляризованного функционала

$$\operatorname{arginf}\left\{\|Kf - S_\delta\|^2_{L_2} + \alpha\|f\|^2_{W_2^2}\right\},\quad \text{где}\ \ \alpha > 0\ \text{- параметр регуляризации.}$$

Уравнение Эйлера для этого функционала

$$Kf = S(x,y)\,, \tag{5}$$

где $K = T^*T,\qquad S(x,y) = T^*p,\qquad T^*p = \int\limits_0^{\pi} p(l,\theta)d\theta$.

Решение задачи (5) в методе регуляризации сводится к формуле

$$f_\alpha(x,y) = \int_0^\pi d\theta \int_{-\infty}^{\infty} K_\alpha(l-l')p_\delta(l',\theta)dl', \qquad (6)$$

где $K_\alpha(l)$ - интегрируемая с квадратом на всей оси функция, зависящая от числового параметра α.

Реконструкция получается по правилу $f_\alpha = B(p*_1 K_\alpha)$ и выполняется в два этапа.

1. Свертка по первой переменной (выполняется с помощью преобразования Фурье). Функция $K_\alpha(l)$ выбирается удовлетворяющей условию $F[K_\alpha(u)](\omega) = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{|\omega|}{1+\alpha M(\omega)}$, $M(\omega) \approx |\omega|^p$, $(p > 2)$.

2. Обратное проецирование.

У рассматриваемых алгоритмов обнаруживается значительное структурное сходство: они выполняются в два этапа и содержание этих этапов практически совпадает. Различие состоит в подходе к выбору сворачивающей функции. Различаются наборы управляющих параметров. Для сверточного алгоритма это параметры, определяющие функцию окна, а в методе регуляризации - параметр регуляризации α, параметр р. Отличается и реализация вычислений (дискретная свертка в одном случае и быстрое преобразование Фурье в другом).

При оценке качества работы алгоритма реконструкции результат его работы желательно сравнивать с заранее известным ответом. Для этого генерирование проекционных данных проводится для модельного объекта известной структуры. В качестве модельного объекта удобно взять набор кругов, так как в этом случае проекционные данные можно получить аналитически. Для круга с центром в начале координат с радиусом R и плотностью C проекция имеет наиболее простой вид, показанный на рис. 2, и не зависит от угла проектирования θ:

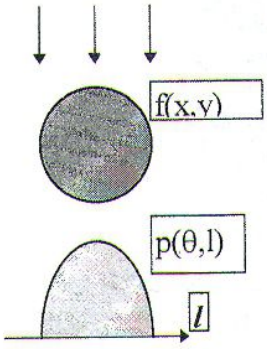


Рис. 2

$$P_0(R,C,l) = \begin{cases} 2\cdot C\cdot\sqrt{R^2-l^2}, & l<R, \\ 0, & l \ge R. \end{cases}$$

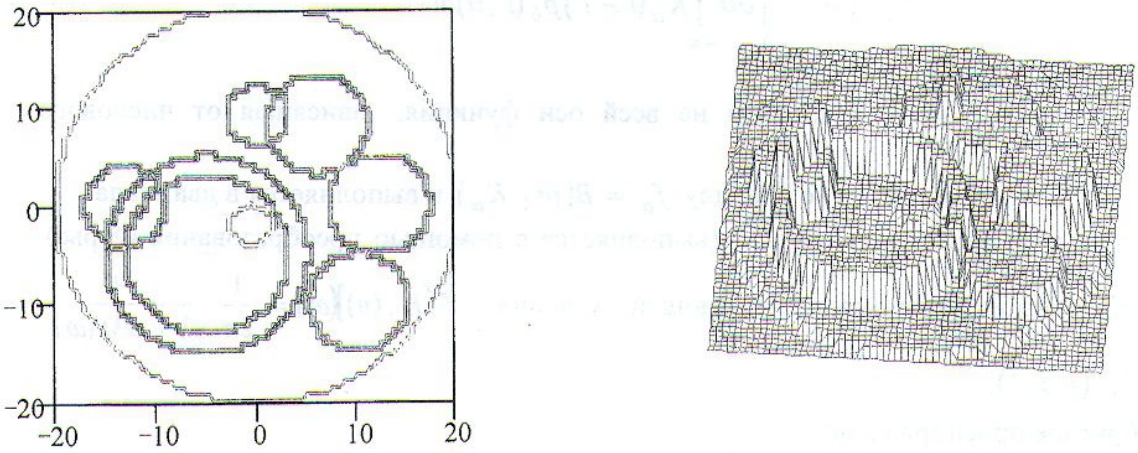
Для сдвинутого из начала координат круга с центром в точке (r_k, φ_k) проекция уже зависит от угла проектирования θ:

$$Ps(k,l,\theta) = P_0(R_k, C_k, l - r_k\cdot\cos(\theta-\varphi_k)).$$

Проекцию набора кругов получим в виде суммы

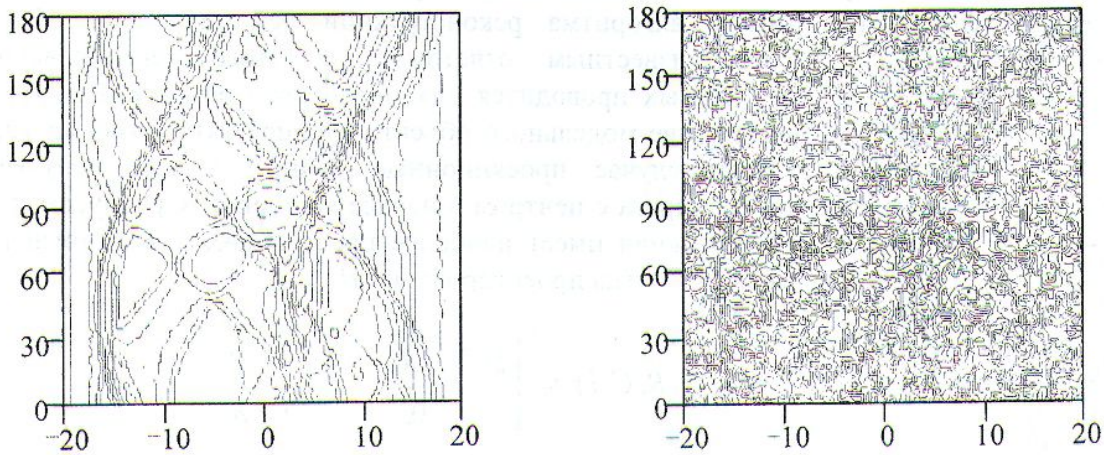
$$P(l,\theta) = \sum_k Ps(k,l,\theta) + \xi,$$

где ξ - случайная величина, имитирующая «шум» в данных. Построенный из кругов модельный объект позволяет моделировать проекционные данные для таких произвольным образом расположенных фигур, как кольцо, круг в кольце, комбинация с наложением кругов и колец, малые круги на фоне большого круга и т.п. На рис. 3 показан пример модельного объекта, составленного из кругов (*а* - плоское и *б* - объемное изображения), а на рис. 4 - соответствующие проекционные данные (*а* - без шума, *б* - содержащие шум с уровнем z = 200).



а *б*

Рис. 3



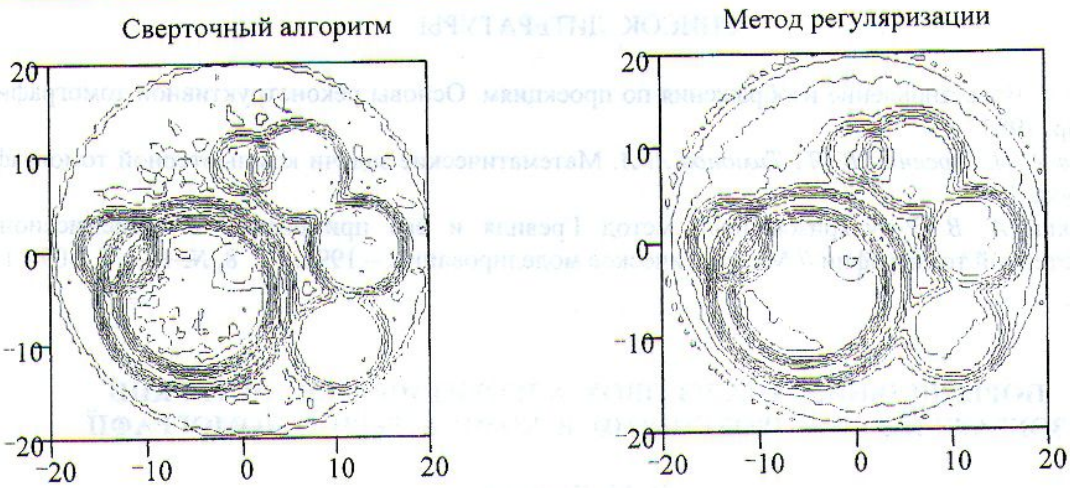
а *б*

Рис. 4

Ниже показаны результаты работы алгоритмов, т.е. реконструкции объекта (для СА - слева (*а*), для МР - справа (*б*)) в условиях, когда фон равен 5, а параметр шума z = 10 (рис. 5) и z = 200 (рис. 6).

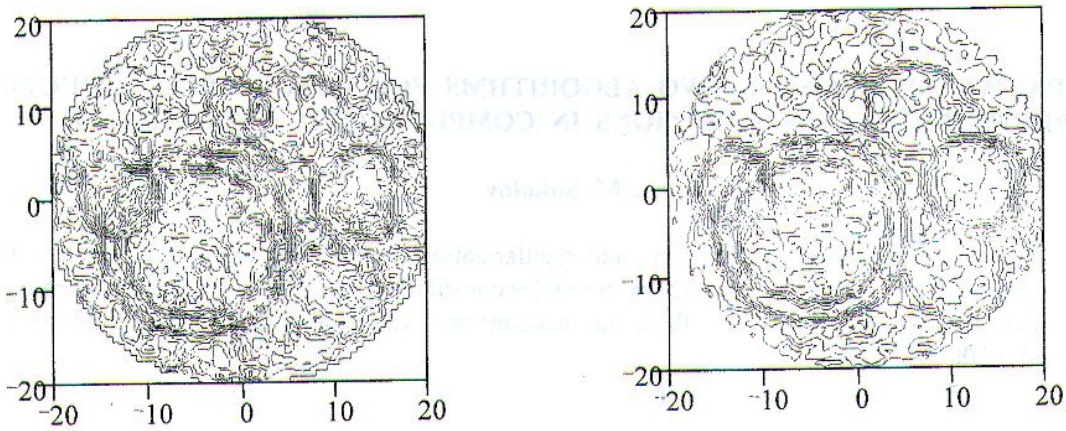
За меру влияния шума на результат работы алгоритма принято отношение $R(z) = \frac{\|F_Z - F_0\|}{\|F_0\|}$, где $\|\cdot\|$ - норма матрицы (выбрана среднеквадратическая метрика), F_0 и F_Z - изображения, восстановленные алгоритмом при уровне шума 0 и z. Результаты расчета для сверточного алгоритма (Rc) и для метода регуляризации (Rr), приведенные на рис.7, показывают, что метод регуляризации более устойчив к влиянию шума.

Метод оценки на основе предложенных модельных данных применим и для других алгоритмов. Выбор же алгоритма с лучшими характеристиками может позволить уменьшить получаемую пациентом дозу облучения и улучшить условия диагностики.



а *б*

Рис. 5



а *б*

Рис. 6

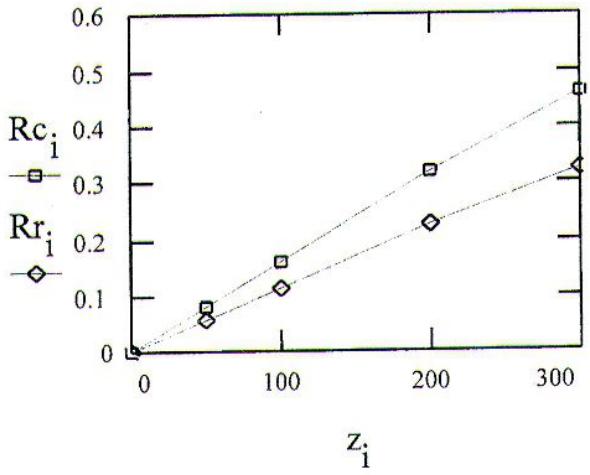


Рис. 7

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хермен Г.* Восстановление изображения по проекциям. Основы реконструктивной томографии. - М.: Мир, 1983.
2. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я., Тимонов А. А.* Математические задачи компьютерной томографии. М.: Наука, 1987.
3. *Хованский А. В.* Регуляризованный метод Гревиля и его применение в трансмиссионной компьютерной томографии // Математическое моделирование. – 1996. - Т. 8, № 11. - С. 109 - 118.

ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ ДВОХ АЛГОРИТМІВ РЕКОНСТРУКЦІЇ ЗОБРАЖЕННЯ ЗА ПРОЕКЦІЯМИ В КОМП'ЮТЕРНІЙ ТОМОГРАФІЇ

О. М. Соколов

Розглядаються два алгоритми відбудови зображення за проекціями у комп'ютерній томографії - згортковий алгоритм і метод регуляризації. Обидва алгоритми реалізовано й зроблено їх порівняльну оцінку з урахуванням їх стійкості, вибору керуючих параметрів та обчислювальних методів, що застосовуються.

COMPARATIVE ANALYSIS OF TWO ALGORITHMS FOR IMAGE RECONSTRUCTION FROM SERIES OF PROJECTIONS IN COMPUTERIZED TOMOGRAPHY

A. M. Sokolov

Two algorithms (convolution algorithm and regularization method) for image reconstruction from series of projections in computerized tomography are under consideration. These two algorithms are realized and their comparative assessment is done taking into account their robustness, key parameter choosing and used numerical methods.