

## ДИНАМІКА ОПТИЧНИХ СОЛІТОНІВ В ОПТОВОЛОКОННИХ СИСТЕМАХ

Т.О. Давидова, Ю.О. Залізник

Розглянуто динаміку солітонів огинаючої, які описуються узагальненим нелінійним рівнянням Шредінгера, яке включає ефекти насичення нелінійності та ефекти дисперсії високого порядку. Методом Ляпунова показано існування стійких солітонних розв'язків модельного рівняння, фаза яких нелінійно змінюється з часом. Знайдено новий точний солітонний розв'язок з нелінійно-змінною фазою. Варіаційним методом проаналізовано еволюцію хвильових пакетів поблизу точного розв'язку.

У роботі [1] вперше було висунуто гіпотезу про можливість побудови наддовгих ліній оптичної передачі сигналів, у яких за одиницю інформації вибрано солітон. Такі лінії передачі не потребують складних і дорогих оптичних повторювачів ("репітерів"), які виділяють, перебудовують та перепосилають отриманий сигнал через кожні 100 - 120 км шляху. Втрати енергії солітона при розповсюдженні по волокну легко скомпенсувати за допомогою ефекту Рамана, пропускаючи разом із солітоном "імпульс підсилення". Це дозволяє створювати лінії передачі протяжністю 10 - 15 тис. км із пропускнуою здатністю 5 - 10, а в деяких випадках до 100 Гігабод [2]. Швидкість передачі даних залежить від тривалості солітонного імпульсу, і для досягнення високих швидкостей тривалість імпульсу необхідно суттєво зменшувати. Динаміка імпульсів тривалістю близько 100 пс добре моделюється за допомогою класичного нелінійного рівняння Шредінгера (НРШ), що описує конкуренцію ефектів слабкої дисперсії та слабкої нелінійності для хвиль огинаючої. Воно має нескінченний набір інтегралів руху і допускає точну інтегровність для довільного початкового розподілу поля. Із зменшенням тривалості імпульсів до кількох десятків фемтосекунд постає необхідність враховувати нові доданки в розкладі дисперсії, а також, поряд із звичайним електронним ефектом Керра, затримку нелінійного відгуку середовища на проходження імпульсу – ефект Рамана. Також із збільшенням амплітуди вхідного сигналу необхідно враховувати ефекти, пов'язані з насиченням нелінійності середовища. Базове нелінійне рівняння, що описує одновимірну еволюцію огинаючої і враховує усі вищезгадані ефекти, має вигляд [3]

$$i \frac{\partial \psi}{\partial x} = -i\beta_0' \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\beta_0''}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + i \frac{\beta_0'''}{6} \frac{\partial^3 \psi}{\partial t^3} + \frac{\beta_0^{IV}}{24} \frac{\partial^4 \psi}{\partial t^4} +$$

$$+ \sigma \psi |\psi|^2 + \sigma_I \psi |\psi|^4 + i\gamma \psi - \sigma \tau_R \psi \frac{\partial |\psi|^2}{\partial t} - \frac{i\sigma}{\omega_0} \frac{\partial (\psi |\psi|^2)}{\partial t} \quad (1)$$

У цьому рівнянні доданки, що містять похідні  $\frac{\partial^n \psi}{\partial t^n}$ ,  $n=1, \dots, 4$ , відповідають розкладу дисперсії до четвертого порядку, доданок  $\sigma \psi |\psi|^2$  описує електронний ефект Керра, доданок, пропорційний до  $\sigma_I$ , відповідає насиченню нелінійності, доданок  $\sim i\gamma$  - втратам енергії при поширенні імпульсу, а останні два доданки описують ефект Рамана. Модельне рівняння (1) адекватно описує динаміку огинаючої при тривалості імпульсів  $\geq 10$  фемтосекунд. Для більш коротких імпульсів саме наближення повільної еволюції огинаючої перестає працювати, і замість рівняння типу НРШ слід розв'язувати повну систему рівнянь Максвелла. Базове рівняння (1) можна суттєво спростити, вибравши несучу частоту солітона в мінімумі дисперсії групової швидкості. При такому виборі в розкладі дисперсії залишаться лише парні похідні – друга та четверта.



У даній роботі ми зосередимось на вивченні солітонних розв'язків рівняння типу НРШ, яке враховує дисперсійні доданки до четвертого порядку і ефекти, пов'язані з насиченням нелінійності, але не враховує втрат енергії та непружного розсіювання на акустичних фононах. Модельне еволюційне рівняння буде узагальненим НРШ (УНРШ):

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} + D \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + P \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + B \psi |\psi|^2 + K \psi |\psi|^4 = 0. \quad (2)$$

Для визначеності зафіксуємо знаки коефіцієнтів рівняння  $D < 0$ ,  $P < 0$ ,  $B > 0$ ,  $K < 0$ , що відповідає режиму нормальної дисперсії та фокусуєчому ефекту Керра для малих інтенсивностей і дефокусуєчому – для великих. Передусім відмітимо, що при фіксованому співвідношенні коефіцієнтів, а саме, при  $\frac{KD^2}{PB^2} = \frac{7}{18}$ , існує точний аналітичний розв'язок УНРШ (2)

$$\psi(x, t) = h \exp(i\lambda x) \cosh^{-1}(\mu t) \cosh^{-i\gamma}(\mu t), \quad (3)$$

де  $\mu^2 = D/8P$ ,  $\gamma = \pm\sqrt{5}$ ,  $\lambda = -\frac{9}{16} \frac{D^2}{P}$ ,  $h^2 = \frac{9}{4} \frac{D^2}{|P||B|}$ , фаза якого нелінійно залежить від часу. Назвемо розв'язок такого вигляду солітоном з нелінійно-змінною фазою (НЗФ).

Модельне рівняння (2) має три інтеграли руху:

1) число квантів

$$N = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dt, \quad (4)$$

2) гамільтоніан

$$H = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ D \left| \frac{d\psi}{dt} \right|^2 - P \left| \frac{d^2\psi}{dt^2} \right|^2 - \frac{B}{2} |\psi|^4 - \frac{K}{3} |\psi|^6 \right\} dt, \quad (5)$$

3) імпульс

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} s dt, \quad s = \frac{i}{2} \left[ \psi \frac{d\psi^*}{dt} - \psi^* \frac{d\psi}{dt} \right] = |\psi|^2 \frac{d\varphi}{dt}, \quad \varphi(x, t) = \arg \psi(x, t). \quad (6)$$

Існування стійких солітонних розв'язків у рамках УНРШ (2) покажемо прямим методом Ляпунова. Для цього доведемо, що гамільтоніан від'ємний та обмежений знизу. Очевидно, що для солітонного розв'язку вигляду

$$\psi(t) = \Phi(t) \exp(i\lambda x), \quad \text{де } \Phi(x) = h_0 f\left(\frac{t}{a}\right) \exp\left(i\varphi\left(\frac{t}{a}\right)\right)$$

функція  $\Phi$  повинна підкорятися звичайному диференційному рівнянню

$$-\lambda \Phi + D \Phi'' + P \Phi^{IV} + B \Phi |\Phi|^2 + K \Phi |\Phi|^4 = 0. \quad (7)$$

Помноживши (7) на  $\Phi^*$  та проінтегрувавши по  $t$  від  $-\infty$  до  $\infty$ , матимемо

$$\lambda N = -D \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi|^2 dt + P \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi^{IV}|^2 dt + B \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi|^4 dt + K \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi|^6 dt. \quad (8)$$

Помноживши (7) на  $t \frac{d\Phi^*}{dt}$ , склавши із спряженим та проінтегрувавши, отримаємо ще одне корисне інтегральне співвідношення

$$\lambda N = D \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi|^2 dt - 3P \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi'|^2 dt + \frac{B}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi|^4 dt + \frac{K}{3} \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi|^6 dt. \quad (9)$$

Використовуючи співвідношення (8) і (9), можна подати гамільтоніан (5) для солітонних розв'язків у вигляді

$$H = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ P |\Phi'|^2 - \frac{B}{4} |\Phi|^4 \right\} dt, \quad (10)$$

звідки видно, що при  $P < 0$ ,  $B > 0$  гамільтоніан для солітонних розв'язків завжди від'ємний.

Покажемо тепер, що функціонал (5) обмежений знизу. Позначивши

$$X = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{d^2 \psi}{dt^2} \right|^2 dt$$

та використавши нерівності

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{d\psi}{dt} \right|^2 dt \leq N^{1/2} X^{1/2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^4 dt \leq \frac{1}{\sqrt{3}} N^{3/2} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{d\psi}{dt} \right|^2 dt \right] \leq \frac{1}{\sqrt{3}} N^{7/2} X^{1/4},$$

отримаємо таку оцінку для гамільтоніана :

$$\begin{aligned} H &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ -|D| \left| \frac{d\psi}{dt} \right|^2 + |P| \left| \frac{d^2 \psi}{dt^2} \right|^2 - \frac{|B|}{2} |\psi|^4 + \frac{|K|}{3} |\psi|^6 \right\} dt \geq \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ -|D| \left| \frac{d\psi}{dt} \right|^2 - \frac{|B|}{2} |\psi|^4 + |P| \left| \frac{d^2 \psi}{dt^2} \right|^2 \right\} dt \geq \\ &= -|D| N^{1/2} X^{1/2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} |B| N^{7/2} X^{1/4} + |P| X \equiv F(X). \end{aligned} \quad (11)$$

Останній вираз у (11), як функція  $X$ , має мінімум в точці  $X = X_0$ , де через  $X_0$  позначено єдиний додатний корінь рівняння  $F'(X) = 0$ . Враховуючи, що  $F'(X_0) = 0$ , отримуємо

$$F(X_0) = -\frac{1}{2} |D| N^{1/2} X_0^{1/2} - \frac{\sqrt{3}}{8} |B| N^{7/2} X_0^{1/4}, \quad (12)$$

звідки видно, що  $F(X_0) < 0$ . З того, що  $X_0$  та  $F(X_0)$  залежать тільки від  $D$ ,  $P$ ,  $B$ ,  $N$  випливає, що при фіксованому числі квантів гамільтоніан обмежений знизу значенням  $F(X_0)$ . Тому існує точний його мінімум, який реалізує стійкий солітонний розв'язок УНРШ (2) із  $D < 0$ ,  $P < 0$ ,  $B > 0$ ,  $K < 0$ . Також вкажемо на те, що принаймні у деяких випадках солітон, фаза якого змінюється лінійно з часом, нестійкий при довільному значенні числа квантів (це легко



показати за допомогою варіаційного методу, описаного нижче), тому єдиною альтернативою в цих випадках буде стійкість солітона з більш складною, нелінійною залежністю фази від часу, наприклад солітона вигляду (3).

Подальший аналіз солітонних розв'язків УНРШ (2) базується на наближеному варіаційному методі з пробною функцією, яка включає знайдений точний розв'язок (3). Виберемо пробну функцію у вигляді

$$\psi(x, t) = 2^{-1/2} h(x) \cosh^{-1}(\mu(x)t) \exp[i\varphi(x) + i\gamma(x) \ln \cosh(\mu(x)t)]. \quad (13)$$

Враховуючи той факт, що солітонний розв'язок УНРШ (1) реалізує екстремум функціоналу Лагранжа, отримуємо гамільтонову систему рівнянь, що описує просторову еволюцію параметрів солітона  $\mu(x)$  та  $\beta(x) = \mu(x)\gamma(x)$ :

$$\frac{d\mu}{d\zeta} = \frac{2}{N} \frac{\partial H}{\partial \beta}, \quad \frac{d\beta}{d\zeta} = -\frac{2}{N} \frac{\partial H}{\partial \mu}, \quad (14)$$

де  $\zeta = \int_0^x \mu^2 dx$ ,  $N = h^2(x)\mu'(x)$ , і гамільтоніан

$$H = N \left\{ \frac{1}{3} D(\mu^2 + \beta^2) - \frac{1}{5} P \left( \frac{7}{3} \mu^4 + \frac{10}{3} \mu^2 \beta^2 + \beta^4 \right) - \frac{1}{6} BN\mu - \frac{2}{45} KN^2 \mu^2 \right\}. \quad (15)$$

Стаціонарні точки системи рівнянь (14) відповідають екстремумам (мінімумам, максимумам або сідловим точкам) гамільтоніану і при заданому числі квантів  $N$  однозначно визначають параметри солітона. Можна помітити (із  $\left. \frac{\partial H}{\partial \beta} \right|_{\beta=\beta_0} = 0$ ), що за умови  $DP \leq 0$  в системі можуть існувати розв'язки тільки у вигляді звичайних солітонів з  $\beta_0 = 0$ , а при  $DP > 0$  з'являються розв'язки з  $\beta_0 = \pm \sqrt{|D| - 2|P|\mu_0^2} \neq 0$ . Неважко отримати два рівняння, що визначають стаціонарні точки  $\mu_0$  для звичайних солітонів та  $\mu_c$  для солітонів НЗФ:

$$N_0(\mu_0) = \frac{b}{\mu_0} \pm \sqrt{-p_0 \mu_0^2 + d_0 + \frac{b^2}{\mu_0^2}}, \quad N_c(\mu_c) = \frac{b}{\mu_c} \pm \sqrt{p \mu_c^2 - d + \frac{b^2}{\mu_c^2}}, \quad (16)$$

де введено позначення  $b = 15B/16|K|$ ,  $d = 5D/K$ ,  $p = 4P/K$ ,  $p_0 = 21p/4$ ,  $d_0 = 3d/2$ . Солітон стійкий у тому випадку, коли він забезпечує максимум або мінімум гамільтоніану при фіксованому числі квантів  $N$ , і нестійкий, коли він відповідає його сідловій точці. У наведеному розгляді солітон буде стійким, якщо при  $\beta = \beta_0$ ,  $\mu = \mu_0$  розклад гамільтоніана в околі екстремумів у степеневий ряд виражається знаковизначеною квадратичною формою, або

$$h = \frac{\partial^2 H}{\partial \mu^2} \frac{\partial^2 H}{\partial \beta^2} - \left[ \frac{\partial^2 H}{\partial \mu \partial \beta} \right]^2 = -\frac{\partial^2 H}{\partial \mu \partial N} \frac{\partial^2 H}{\partial \beta^2} \frac{dN}{d\mu} > 0. \quad (17)$$

У супротивному випадку солітон буде нестійким. Тому легко отримати властивості стійкості солітонів за якісним виглядом графіків  $N_0(\mu_0)$  та  $N_c(\mu_c)$ . Виявилось, що залежно від співвідношення між коефіцієнтами УНРШ (2) можливі чотири варіанти взаємного розташування кривих  $N_0(\mu_0)$  та  $N_c(\mu_c)$ , які наведено на рис. 1, а – г. Видно, що при

фіксованому числі квантів варіаційний аналіз передбачає існування від одного до трьох стійких солітонних розв'язків. Наприклад, для  $N = N_2$  на рис. 1, а метод передбачає співіснування трьох стійких солітонів – пари солітонів НЗФ та одного звичайного солітона. Відповідний фазовий портрет тристабільної системи (лінії сталого гамільтоніана в площині  $(\beta, \mu)$ ) наведено на рис. 2.

Було також проведено чисельний розрахунок стаціонарних солітонних розв'язків УНРШ (2) в області параметрів, де варіаційний метод передбачає існування і стійкість солітонів. Виявилось, що такі солітони існують, при чому їх параметри (ширина, амплітуда, число квантів, тощо) добре описуються варіаційним методом з пробною функцією (13). Деякі результати розрахунків наведено на рис. 3.

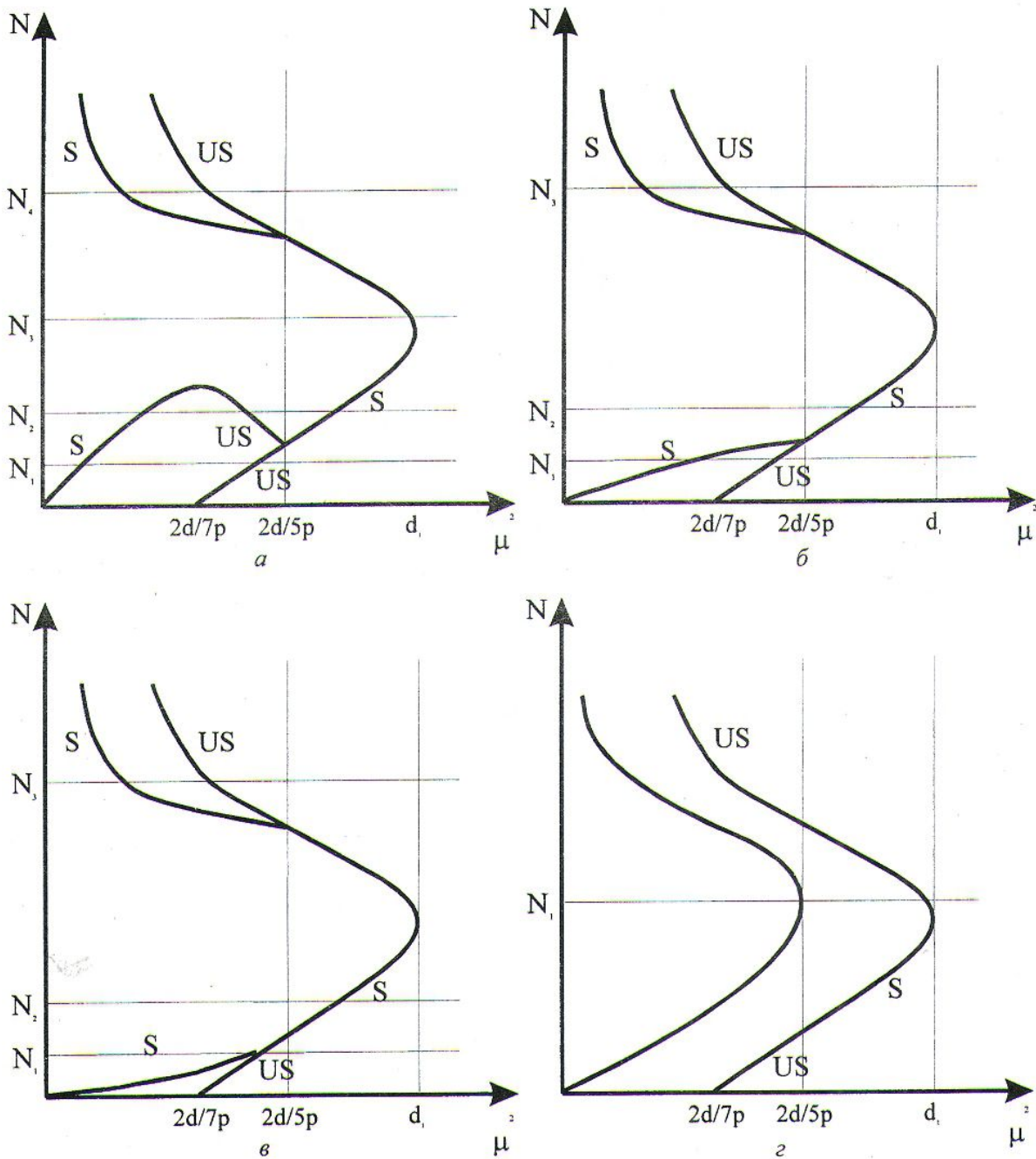


Рис. 1. Залежність числа квантів від квадрату оберненої ширини солітона. Звичайний солітон – права гілка, солітон НЗФ – ліва гілка. Стійкі та нестійкі солітонні гілки позначено “S” та “US” відповідно.



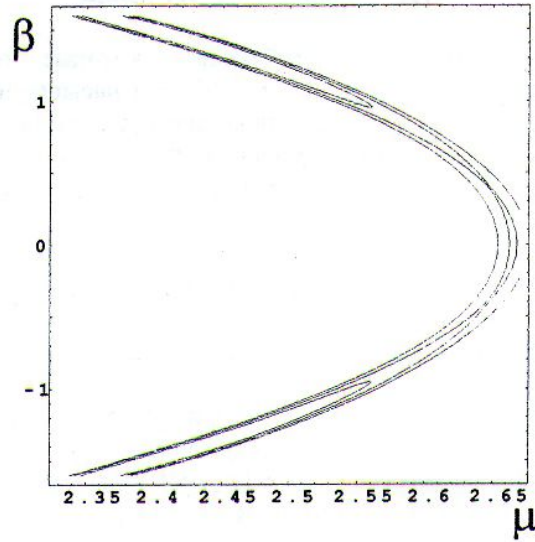
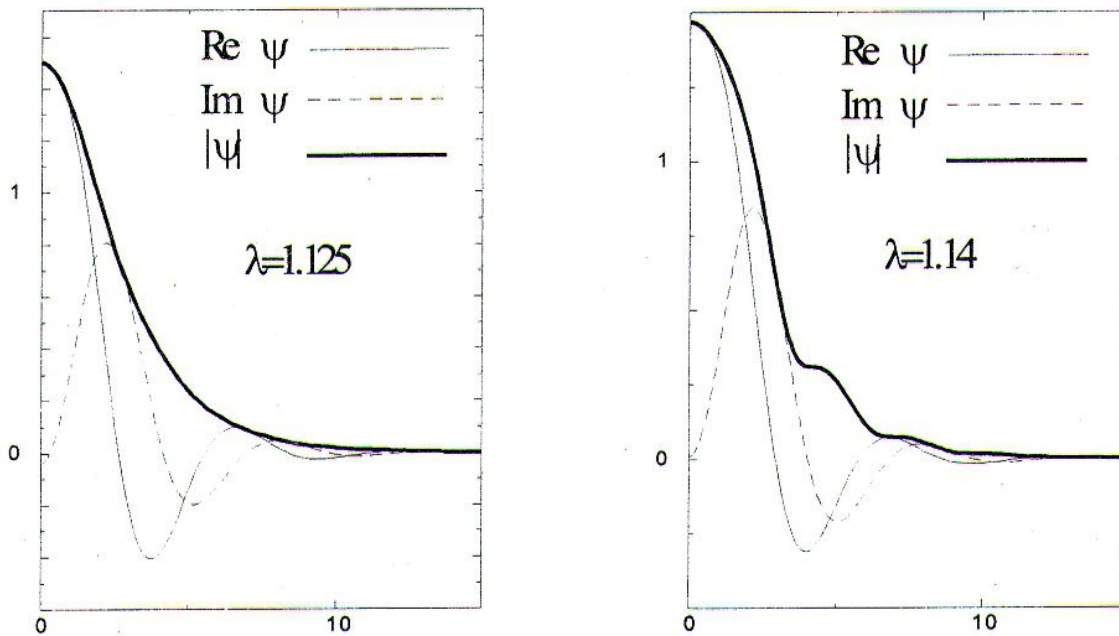


Рис. 2. Фазовий портрет тристабільної солітонної системи.

Рис. 3. Стационарні розв'язки УНРШ (2) з  $D = -1$ ,  $P = -0.5$ ,  $B = 2$ ,  $K = -0.778$  для різних значень  $\lambda$ .

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Hasegawa, A., Tappert, F. // Appl. Phys. Lett. – 1973. – Vol. 23. – P.142.
2. Haus, H, Wong, S. // Rev. Mod. Phys. – 1996. – Vol. 68. – No. 2. – P.1174.
3. Agrawal, G., Nonlinear Fiber Optics. –NY: Acad. Press, 1995.

## **ДИНАМИКА ОПТИЧЕСКИХ СОЛИТОНОВ В ОПТОВОЛОКОННЫХ СИСТЕМАХ**

**Т.А. Давыдова, Ю.А. Зализняк**

Рассмотрена эволюция солитонов огибающей, которые описываются обобщенным нелинейным уравнением Шредингера, включающим эффекты насыщения нелинейности и эффекты дисперсии высших порядков. Методом Ляпунова показано существование устойчивых солитонных решений, фаза которых нелинейно зависит от времени. Найдено новое точное солитонное решение с нелинейно-переменной фазой. С помощью вариационного метода проанализирована эволюция волновых пакетов вблизи точного решения.

### **OPTICAL SOLITONS IN MONOMODE FIBERS**

**T. A. Davydova, Yu. A. Zaliznyak**

The evolution of envelope solitons in the framework of generalized nonlinear Schroedinger equation including high-order dispersive effects and of nonlinearity saturation is considered. In terms of Lyapunov method it was shown that model equation have stable soliton solutions in the form of chirped solitons. New exact chirped soliton solution is presented. The dynamics of wave-packets in the vicinity of exact solution was studied using the direct variational approach.